FM210 - Fisica Matematica I

Primo Esonero [29-10-2012]

SOLUZIONI

Esercizio 1

Il sistema è della forma
$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$
con $\mathbf{x} = (x, y)$,
$$A = \begin{pmatrix} -3\alpha & 2+\alpha \\ \alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Pertanto, se A è invertibile, si può mappare il sitema in uno omogeneo ponendo $\mathbf{y} := \mathbf{x} + A^{-1}\mathbf{b}$, cioè nelle nuove coordinate il sistema diventa
$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}. \tag{1}$$
Verifichiamo quando A è invertibile: il determinante di A è
$$\det(A) = 3\alpha^2 - 2\alpha^2 - \alpha^3 = \alpha^2(1-\alpha),$$
per cui la matrice è invertibile per ogni $\alpha > 0$ con $\alpha \neq 1$. Il caso $\alpha = 1$ andrà quindi trattato a parte.

a) Se $\alpha \neq 1$ possiamo porre il sistema in forma (1) e quindi il punto di equilibrio è banalmente $\mathbf{y}_e = 0$ o nelle vecchie coordinate $\mathbf{x}_e = -A^{-1}\mathbf{b}$, per cui
$$\mathbf{x}_e = -A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)} \begin{pmatrix} \alpha & 2+\alpha \\ \alpha^2 & 3\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)} \begin{pmatrix} 3\alpha+4 \\ \alpha^2+6\alpha \end{pmatrix}$$
Se invece $\alpha = 1$ è immediato verificare che il sistema $\dot{\mathbf{x}} = 0$ ovvero
$$\begin{cases} -3x + 3y = 1, \\ x - y = 2, \end{cases}$$
non ammette soluzione. Quindi se $\alpha = 1$ non ci sono punti di equilibrio.

b) Calcoliamo gli autovalori della matrice:
$$(\lambda + 3\alpha)(\lambda + \alpha) - 2\alpha^2 - \alpha^3 = 0,$$
che ha come soluzioni
$$\lambda_{1,2} = \alpha\left(-2 \pm \sqrt{3+\alpha}\right).$$
Gli autovalori sono sempre distinti perchè la radice non si annulla mai per $\alpha > 0$. Verifichiamo il segno degli autovalori: ovviamente si ha sempre
$$\lambda_1 > \lambda_2$$
e $\lambda_1 = 0$ per
$$4 = 3 + \alpha,$$
ovvero $\alpha = 1$ e
$$\lambda_1 < 0, \quad \text{per } 0 < \alpha < 1.$$
Quindi per $0 < \alpha < 1$ entrambi gli autovalori sono negativi, mentre per $\alpha > 1$, $\lambda_1 > 0$. Di conseguenza
$$\mathbf{x}_e \text{ è } \begin{cases} \text{asintoticamente stabile,} & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ \text{instabile,} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

c) Per la soluzione completa distinguiamo i casi $\alpha \neq 1$ e $\alpha = 1$.

Se $\alpha \neq 1$ la soluzione del sistema (1) si scrive immediatamente

$$\mathbf{y}(t) = ae^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + be^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2,$$

dove $\mathbf{v}_{1,2}$ indicano i due autovettori di A e $a, b \in \mathbb{R}$ sono due parametri. Gli autovettori $\mathbf{v}_{1,2}$ possono essere scelti della forma

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 2+\alpha \\ \alpha(1 \pm \sqrt{3+\alpha}) \end{pmatrix} .$$

Quindi, in forma piú esplicita, la soluzione generale è

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e = e^{-2\alpha t}\Big[ae^{\alpha\sqrt{3+\alpha}\,t}\begin{pmatrix} 2+\alpha \\ \alpha(1+\sqrt{3+\alpha}) \end{pmatrix} + be^{-\alpha\sqrt{3+\alpha}\,t}\begin{pmatrix} 2+\alpha \\ \alpha(1-\sqrt{3+\alpha}) \end{pmatrix}\Big]$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{x}(t) = e^{-2\alpha t}\Big[ae^{\alpha\sqrt{3+\alpha}\,t}\begin{pmatrix} 2+\alpha \\ \alpha(1+\sqrt{3+\alpha}) \end{pmatrix} + be^{-\alpha\sqrt{3+\alpha}\,t}\begin{pmatrix} 2+\alpha \\ \alpha(1-\sqrt{3+\alpha}) \end{pmatrix}\Big] + \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)}\begin{pmatrix} 3\alpha+4 \\ \alpha^2+6\alpha \end{pmatrix}$$

Se $\alpha = 1$, i due autovalori distinti sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -4$ con relativi autovettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le matrici del cambiamento di base e coordinate sono date da

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/12 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix},$$

e ponendo $\mathbf{z} := Q\mathbf{x}$ nelle nuove coordinate il sistema sarà della forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{z} + Q\mathbf{b},$$

ovvero

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{7}{12}, \\ \dot{z}_2 = -4z_2 - \frac{1}{4} . \end{cases}$$

In conclusione la soluzione sarà $z_1(t) = a + \frac{7}{12}t$ e $z_2(t) = be^{-4t} - \frac{1}{16}(1 - e^{-4t})$ e quindi

$$\mathbf{x}(t) = \big(a + \tfrac{7}{12}t\big)\,\mathbf{v}_1 + \big(be^{-4t} - \tfrac{1}{16}(1 - e^{-4t})\big)\,\mathbf{v}_2.$$

Esercizio 2

a) Cerchiamo una costante del moto della forma $H(x, y)$ con $\dot{x} = \partial_y H$ e $\dot{y} = -\partial_x H$. Tale funzione esiste ed è data per esempio da

$$H(x, y) = \tfrac{1}{2}(1+x)^2y^2 + \tfrac{1}{2}(1-x)^2.$$

b) I punti di equilibrio sono soluzioni delle equazioni

$$\begin{cases} (1+x)^2y = 0, \\ -(1+x)y^2 - x + 1 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione ammette soluzioni $y = 0$ e/o $x = -1$. Sostituendo $y = 0$ nella seconda si trova $x = 1$ mentre si verifica che non esiste una soluzione con $x = -1$. In conclusione l'unico punto di equilibrio è $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

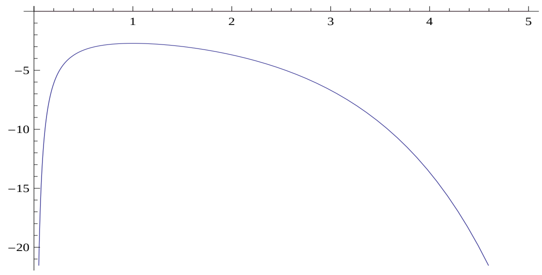

Figura 1: Il potenziale $U(x)$.

c) Ponendo $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio è $\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice A sono $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ e avendo entrambi parte reale nulla, non si può concludere niente sulla stabilità del punto di equilibrio.

d) Verifichiamo che H è una funzione di Ljapunov: ovviamente $\dot{H} = 0$ e $H(1,0) = 0$. Inoltre si vede facilmente che $H(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $H(x,y) = 0$ se e solo se $(1+x)^2 y^2 = 0$ e $(1-x)^2 = 0$, cioè per $x = 1$ e $y = 0$. Quindi H è una funzione di Ljapunov e il suo dominio coincide con $\mathbb{R}^2$. Per il teorema di Ljapunov il punto di equilibrio è *stabile*.

e) Scegliendo $x(t) \equiv -1$, il sistema assegnato diventa: $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 2$, che ammette come soluzione $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ y_0 + 2t \end{pmatrix}$, che è illimitata sia nel passato che nel futuro.

Esercizio 3

a) Il sistema dinamico è

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = \dfrac{e^{\alpha x}(\alpha x - 1)}{x^2}. \end{cases}$$

L'energia meccanica si conserva:

$$H(x,y) = \tfrac{1}{2} y^2 + U(x), \qquad U(x) = -\frac{e^{\alpha x}}{x}.$$

b) Il grafico di $U(x)$ è in fig. 1.

c) Il sistema ammette un unico punto di equilibrio $P_e = (\frac{1}{\alpha}, 0)$. Esso è *instabile* in quanto massimo isolato dell'energia potenziale. L'instabilità del punto di equilibrio si può verificare esplicitamente studiando la matrice del linearizzato attorno a P_e, che ha la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e\alpha^3 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha come autovalori $\lambda_\pm = \pm\sqrt{e\alpha^3}$; poiché uno dei due autovalori è positivo, il punto di equilibrio è instabile, per il criterio di stabilità lineare.

d) Si può prendere per esempio $x_0 = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, e $\dot{x}_0 = 0$. Dalla conservazione dell'energia meccanica con $U(x) = e^{\alpha x}/x$ si trova:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{e^{\alpha x}}{x} = E_0$$

con $E_0 = U(\frac{1}{\alpha}+\varepsilon) < U(\frac{1}{\alpha})$. Invertendo tale relazione si trova:

$$y = \dot{x} = \sqrt{2(E_0 + e^{\alpha x}/x)} \quad \Rightarrow \quad t = f(x(t)) := \int_{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2(E_0 + e^{\alpha x}/x)}}$$

che definisce $x(t)$ in forma implicita (si noti infatti che l'equazione $t = f(x(t))$ è invertibile, semplicemente perché $f(x)$ è una funzione strettamente crescente del suo argomento). Si trova inoltre che

$$\lim_{X\to\infty} \int_{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}^{X} \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{2(E_0 + e^{\alpha x}/x)}} < \infty,$$

poiché la funzione integranda si comporta asintoticamente quando $x \to \infty$ come

$$\sqrt{x} e^{-\frac{\alpha x}{2}},$$

che è integrabile all'infinito per ogni $\alpha > 0$. Di conseguenza $x(t)$ diverge in un tempo finito.