FM210 - Fisica Matematica I

Prova pre-Esonero [26-10-2012]

SOLUZIONI

Esercizio 1

a) Calcoliamo gli autovalori della matrice: sviluppando il determinante di $A - \lambda\mathbb{1}$ rispetto all'ultima riga otteniamo l'equazione agli autovalori

$$-5(1+\lambda+2\alpha) - (3+\lambda)\left[(1+\lambda)^2 - 4\alpha^2\right] = (1+\lambda+2\alpha)\left[-5-(3+\lambda)(1+\lambda-2\alpha)\right] = 0,$$

che ha come soluzioni

$$\lambda_1 = -1-2\alpha, \qquad \lambda_{2,3} = \alpha - 2 \pm \sqrt{\alpha^2+2\alpha-4}.$$

Gli autovalori sono tutti e tre distinti tranne quando $\alpha^2+2\alpha-4=0$, ovvero per

$$\alpha = -1 \pm \sqrt{5}.$$

Se $\alpha \neq -1 \pm \sqrt{5}$ esistono tre autovettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (il cui calcolo lasciamo come facile esercizio al lettore) tali che la soluzione completa si scrive

$$\mathbf{x}(t) = ae^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + be^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + ce^{\lambda_3 t}\mathbf{v}_3,$$

con a, b, c dipendenti dai dati iniziali.

Se invece $\alpha = -1 \pm \sqrt{5}$, esiste un solo autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3$. La matrice non può quindi essere diagonalizzata e la soluzione generale è in tal caso data da

$$\mathbf{x}(t) = ae^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + (b+ct)\,e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + ce^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2^{(1)},$$

dove $\mathbf{v}_2^{(1)}$ è ora l'autovettore generalizzato tale che $(A-\lambda_2\mathbb{1})\mathbf{v}_2^{(1)} = \mathbf{v}_2$.

Per quanto riguarda la discussione della stabilità del punto di equilibrio osserviamo che

- Se $\alpha < -1/2$, $\lambda_1 > 0$ e quindi il punto è *instabile*;
- Se $\alpha = 1/2$, $\lambda_1 = 0$ ma $\Re(\lambda_{2,3}) = -5/2 < 0$ e quindi il punto è *stabile*;
- Se $-1/2 < \alpha < 4/3$, $\lambda_1 < 0$ e $\Re(\lambda_{2,3}) < 0$ e quindi il punto è *asintoticamente stabile*;
- Se $\alpha = 4/3$, $\lambda_2 = 0$ ma $\lambda_1, \lambda_3 < 0$ quindi il punto è *stabile*;
- Se $\alpha > 4/3$, $\lambda_2 > 0$ e quindi il punto è *instabile*.

Esercizio 2

a) Il sistema dinamico associato si ottiene ponendo $\dot{x} =: y$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

b) Il sistema è meccanico conservativo per cui l'energia si conserva:

$$E = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x),$$

con

$$U(x) := \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} - \log x.$$

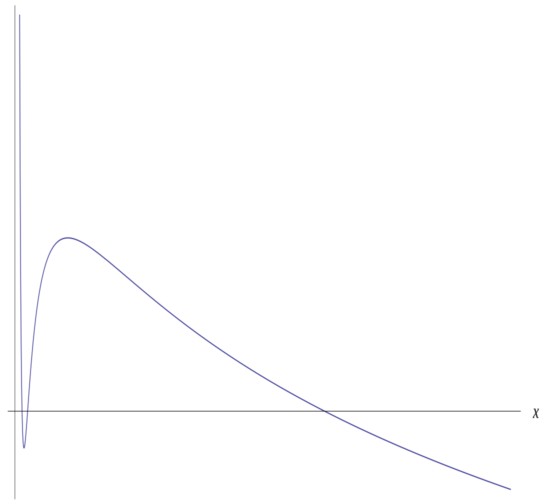

Figura 1: Il potenziale $U(x)$.

c) I punti di equilibrio del sistema dinamico sono della forma $P_{1,2} = (x_{1,2}, 0)$ dove $x_{1,2}$ sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 4x + 1 = 0,$$

ovvero

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

d) Il sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio è della forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dove si è posto $\mathbf{x} := (x, y)$ e

$$A(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$a_{1,2} = \frac{-x_{1,2}^2 + 8x_{1,2} - 3}{x_{1,2}^4}.$$

Gli autovalori della matrice A sono soluzione dell'equazione

$$\lambda^2 - a_{1,2} = 0,$$

ed è facile verificare che $a_1 < 0$ mentre $a_2 > 0$. Pertanto nel caso di P_1 gli autovalori sono immaginari puri e nulla si può concludere sulla stabilità del punto, mentre P_2 è *instabile* poiché esiste un autovalore con parte reale strettamente positiva.

Nel caso di P_1 cerchiamo perciò una funzione di Ljapunov. Dato che il sistema è conservativo, l'energia è una buona candidata ad essere una funzione di Ljapunov: ponendo

$$H(x, y) := \tfrac{1}{2}y^2 + U(x),$$

si ha banalmente $\dot{H} = 0$. D'altra parte è facile verificare che $U(x)$ ha un minimo locale isolato in x_1. Pertanto se consideriamo la funzione

$$W(x, y) := H(x, y) - U(x_1),$$

essa soddisferà tutti i criteri del teorema di Ljapunov in un intorno del punto di equilibrio P_1: $\dot{W} = 0$, $W(P_1) = 0$ e $W((x, y)) > 0$ per $(x, y) \neq P_1$ in un intorno di P_1. Di conseguenza P_1 è *stabile.* Ovviamente lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere facendo riferimento al criterio di Dirichlet in quanto $U(x)$ ha un minimo locale isolato in $x = 2 - \sqrt{3}$.

e) Dalla stabilità dimostrata al punto precedente segue immediatamente l'esistenza globale nel futuro per i dati iniziali nello stesso intorno su cui è definita la funzione di Ljapunov. Poiché $\dot{W} = 0$, W è una funzione di Ljapunov anche per il moto all'indietro nel tempo, e quindi si ha stabilità ed esistenza globale anche nel passato.

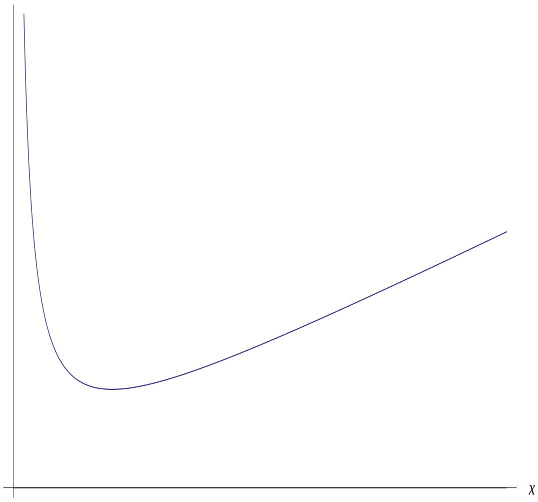

Figura 2: La funzione $V(x)$.

f) Per verificare l'esistenza globale per tutti i dati iniziali, è sufficiente verificare che il tempo per giungere all'infinito (che è dove il potenziale diverge a $-\infty$) è infinito. Dalla conservazione dell'energia si trova $\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - U(x))}$, da cui:

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

dove $E - U(x)$ si comporta come $|\log x|$, asintoticamente per $x \to \infty$. Dato che $\int \frac{dx}{\sqrt{\log x}}$ non è integrabile per x grandi, si ha che $t \to \infty$ per $x(t) \to \infty$, da cui segue l'esistenza globale delle soluzioni.

Esercizio 3

a) Cerchiamo una costante del moto della forma $H(x, y)$ con $\dot{x} = \partial_y H$ e $\dot{y} = -\partial_x H$. E' facile vedere che tale funzione esiste ed è data da

$$H(x, y) = -\tfrac{1}{4} e^{x^2} y^4 - V(x),$$

con $V(x) = \frac{1}{x} + x$.

b) Per dimostrare l'esistenza di una quantità conservata, osserviamo che se H è costante del moto anche $-H$ lo è. Se quindi $-H = E > 0$ abbiamo

$$E = -H \geq \tfrac{1}{4} y^4 + V(x),$$

dove abbiamo usato il fatto che $e^{x^2} \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre si ha $V(x) \geq 2$ e quindi

$$|y(t)| \leq (4E - 8)^{1/4}, \qquad V(x) \leq E.$$

La seconda condizione implica a sua volta che

$$0 < x_-(E) \leq x(t) \leq x_+(E) < +\infty,$$

dove (notare che $E \geq 2$) $x_\pm(E)$ sono le soluzione di $V(x) = E$ ovvero

$$x_\pm(E) = \tfrac{1}{2} E \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} E^2 - 1}.$$

In conclusione la soluzione resta sempre all'interno di un compatto per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi è globale nel tempo.

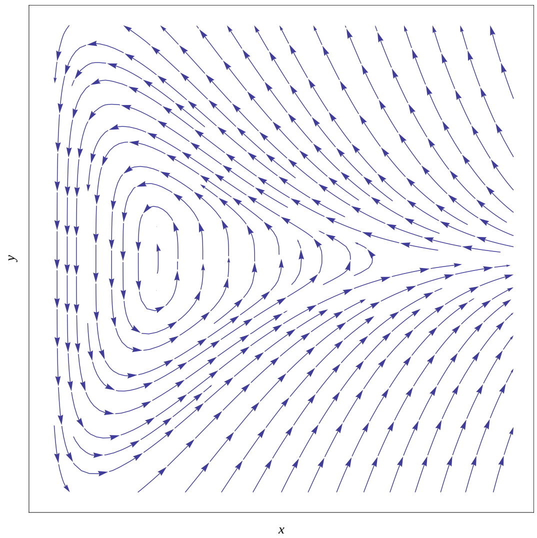

Figura 3: Le curve di livello di $H(x, y)$.

c) C'è un solo punto di equilibrio $P_1 = (1, 0)$.

d) Il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio è della forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dove si è posto $\mathbf{x} := (x, y)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono entrambi nulli per cui nulla si può dire sulla stabilità di P_1.

e) Le curve di livello mostrate in fig. 3 mostrano che P_1 è un centro e quindi un punto di equilibrio *stabile*.