

Esercizi

1. Si determini la soluzione generale del sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = 4\alpha^2 x - y + 2\alpha z \\ \dot{z} = -5x - 3z \end{cases} \quad (1)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Si discuta la stabilità di $(0, 0, 0)$.

2. Si consideri il sistema descritto dall'equazione su $(0, +\infty)$

$$\ddot{x} = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x}$$

- (a) Si scriva il sistema dinamico associato.
- (b) Si determini una quantità conservata del moto.
- (c) Si determinino i punti di equilibrio del sistema.
- (d) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno ai punti di equilibrio: cosa si può concludere sulla stabilità dei punti di equilibrio trovati? In caso non si possa, si usi un criterio di stabilità alternativo per dimostrarne la stabilità o l'instabilità.
- (e) Si determini un insieme di dati iniziali per cui il moto è definito globalmente
- (f) (**Facoltativo.**) Si dimostri che tutti i dati iniziali nel dominio di definizione del problema generano moti globali sia nel passato che nel futuro.
3. Sia dato il sistema planare con $(x, y) \in W := (0, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = -e^{x^2} y^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{2} x e^{x^2} y^4 \end{cases}$$

- (a) Si trovi una costante del moto;
- (b) Si dimostri che la soluzione è globale per ogni dato iniziale in W .
- (c) Si trovino i punti di equilibrio del sistema.
- (d) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno ai punti di equilibrio: cosa si può concludere sulla stabilità dei punti di equilibrio trovati?
- (e) (**Facoltativo.**) Si disentino le curve di livello del sistema associate alla quantità conservata di cui al punto (a). Si usi il risultato per ridiscutere la stabilità dei punti di equilibrio per cui il criterio del linearizzato non è conclusivo.