

FM210 - FISICA MATEMATICA I

PRIMA PROVA DI ESONERO [29-10-2012]

1. (12 punti). Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = -3\alpha x + (2 + \alpha)y + 1, \\ \dot{y} = \alpha^2 x - \alpha y + 2, \end{cases}$$

con $\alpha > 0$. Al variare di α in $(0, +\infty)$:

- (a) si trovino i punti di equilibrio del sistema;
 - (b) se ne studi la stabilità;
 - (c) si scriva la soluzione generale del problema.
2. (10 punti). Si consideri il sistema planare con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + x)^2 y, \\ \dot{y} = -(1 + x)y^2 - x + 1. \end{cases}$$

- (a) Si trovi una costante del moto.
 - (b) Si dimostri che il sistema ammette un unico punto di equilibrio (x_0, y_0) e lo si determini.
 - (c) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno al punto di equilibrio, si studi lo spettro della matrice del linearizzato e se ne discutano le conseguenze sulla stabilità del punto di equilibrio.
 - (d) Dopo aver ricordato la definizione di funzione di Ljapunov attorno a un punto di equilibrio, se ne trovi una per il sistema assegnato attorno a (x_0, y_0) , verificandone esplicitamente la definizione e stimandone esplicitamente il dominio. Se ne discutano le conseguenze sulla stabilità del punto di equilibrio.
 - (e) [Facoltativo.] Si dimostri che esistono soluzioni del problema che non rimangono limitate né nel passato né nel futuro.
3. (8 punti). Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} = \frac{e^{\alpha x}(\alpha x - 1)}{x^2},$$

con $\alpha > 0$ e $x \in (0, +\infty)$.

- (a) Si scriva il sistema dinamico associato al problema e se ne determini una costante del moto, verificandone esplicitamente l'invarianza lungo il moto.
- (b) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
- (c) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
- (d) [Facoltativo.] Si esibiscano dati iniziali per cui la soluzione del problema non è globale.