Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/13

FM210 - Fisica Matematica I

Prima Prova Scritta [21-1-2013]

SOLUZIONI

Esercizio 1

(a) Il sistema è della forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 8 \\ -2 & -\beta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Se la matrice A è invertibile, allora la posizione di equilibrio del sistema è data da $\mathbf{x}_e = -A^{-1}\mathbf{b}$. Osserviamo che

$$\det(A) = -\beta^2 + 16,$$

per cui esiste una posizione di equilibrio per ogni $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq \pm 4$. In questo caso abbiamo

$$\mathbf{x}_e = -A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\beta^2 - 16}\begin{pmatrix} -\beta & -8 \\ 2 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta^2 - 16}\begin{pmatrix} -\beta - 16 \\ 2(1+\beta) \end{pmatrix}.$$

Se invece $\beta = \pm 4$ è facile verificare che il sistema $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ non ammette soluzioni e quindi non ci sono posizioni di equilibrio.
Per studiare la stabilità cerchiamo gli autovalori della matrice A: l'equazione secolare è $\lambda^2 - \beta^2 + 16 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda_\pm = \pm\sqrt{\beta^2 - 16}$. Se $|\beta| > 4$ esiste un autovalore $\lambda_+ = \sqrt{\beta^2 - 16}$ positivo e quindi il punto di equilibrio è *instabile*. Invece se $|\beta| < 4$ i due autovalori sono immaginari puri. Il punto di equilibrio è in questo caso un centro e quindi *stabile* (ma non asintoticamente stabile).

(b) Nel caso $\beta = 4$ la matrice ha due autovalori coincidenti uguali a 0. Cerchiamo gli autovettori associati: l'equazione

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

ha come soluzione il solo autovettore $\mathbf{v}_1 = (-2, 1)$. Cerchiamo allora l'autovettore generalizzato che rende la matrice in forma canonica di Jordan: l'equazione $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ ha come soluzione per esempio $\mathbf{v}_2 = (-1/2, 0)$. Un generico vettore $\mathbf{x}$ si può esprimere come combinazione lineare $\mathbf{x}(t) = \alpha_1(t)\mathbf{v}_1 + \alpha_2(t)\mathbf{v}_2$. I dati iniziali implicano

$$\begin{cases} -2\alpha_1(0) - \frac{1}{2}\alpha_2(0) = 0, \\ \alpha_1(0) = 0, \end{cases}$$

che implica $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$. Inoltre in termini di $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$, il sistema si scrive (ricordiamo che nella base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ la matrice è in forma canonica di Jordan con un unico blocco di Jordan di dimensione 2 e autovalore 0)

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1(t) = \alpha_2(t) + 2, \\ \dot{\alpha}_2(t) = -10, \end{cases}$$

dove abbiamo usato che $\mathbf{b} = 2\mathbf{v}_1 - 10\mathbf{v}_2$. Otteniamo pertanto

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = 2t - 5t^2, \\ \alpha_2(t) = -10t, \end{cases}$$

che corrisponde a $\mathbf{x}(t) = (2t - 5t^2)\mathbf{v}_1 - 10t\mathbf{v}_2$ o, equivalentemente

$$\begin{cases} x = (2t - 5t^2)(-2) - 10t(-1/2) = t + 10t^2, \\ y = 2t - 5t^2. \end{cases}$$

(c) Cerchiamo un'Hamiltoniana $H(x,y)$ del sistema: dovrà essere

$$\begin{cases} \partial_y H = \beta x + 8y + 1, \\ \partial_x H = 2x + \beta y - 2. \end{cases}$$

Dalla prima ricaviamo $H(x,y) = 4y^2 + \beta xy + y + C(x)$ e dalla seconda $C'(x) = 2x - 2$ e quindi (per esempio)

$$H(x,y) = x^2 + \beta xy + 4y^2 - 2x + y.$$

Dato che H è una costante del moto la traiettoria è sempre una conica di equazione

$$x^2 + \beta xy + 4y^2 - 2x + y - E = 0,$$

il cui tipo dipende dal parametro $\Delta := \beta^2 - 16$. Se $\Delta > 0$ la curva è un'iperbole, se $\Delta = 0$ una parabola e se $\Delta < 0$ un'ellisse. Nel caso particolare $\beta = 4$ e $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, quindi, la traiettoria corrispondente alla soluzione trovata al punto precedente è una parabola.

Esercizio 2

(a) La posizione e la velocità del centro di massa $\mathbf{X}_{\text{cm}}(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t))$ al tempo $t = 0$ si ricavano dai dati iniziali:

$$\mathbf{X}_{\text{cm}}(0) = \left(0, \tfrac{1}{2}d, h\right), \qquad \dot{\mathbf{X}}_{\text{cm}}(0) = (0,0,0).$$

La legge di Newton per il moto del centro di massa è

$$2m\ddot{\mathbf{X}}_{\text{cm}}(t) = 2m\mathbf{g} = -2mg\mathbf{e}_z,$$

la cui soluzione è $\mathbf{X}_{\text{cm}}(t) = \left(0, \frac{1}{2}d, h - \frac{1}{2}gt^2\right)$.

(b) Gli integrali primi del moto nella coordinata relativa $\mathbf{r}$ sono l'energia E e il momento angolare $\mathbf{L}$ (la massa ridotta è $\mu = \frac{1}{2}m$):

$$E = \tfrac{1}{4}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \tfrac{1}{2}k|\mathbf{r}|^2 = \tfrac{1}{4}m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho), \qquad V_{\text{eff}}(\rho) = \tfrac{1}{2}k\rho^2 + \tfrac{L^2}{m\rho^2},$$

$$\mathbf{L} = \tfrac{1}{2}m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}.$$

Al tempo $t = 0$ abbiamo

$$\mathbf{r}(0) = (0, -d, 0), \qquad \dot{\mathbf{r}}(0) = (0, 0, 2v_0),$$

e quindi

$$E = mv_0^2 + \tfrac{1}{2}kd^2, \qquad \mathbf{L} = -m(dv_0, 0, 0) = -mdv_0\mathbf{e}_x,$$

il che implica che il moto si svolge sul piano $\hat{y}\hat{z}$.

(c) Affinché il moto in $\mathbf{r}$ sia circolare uniforme la coordinata radiale deve trovarsi nella posizione di equilibrio del potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$: calcolando la derivata e uguagliandola a 0, si ha $k\rho - \frac{2L^2}{m\rho^3} = 0$, la cui soluzione è

$$\rho_m = \left(\frac{2L^2}{mk}\right)^{1/4} = \left(\frac{2md^2v_0^2}{k}\right)^{1/4}.$$

La condizione sulla coordinata radiale sarà dunque $|\mathbf{r}(0)| = d = \rho_m$ con $\dot{\rho}(0) = 0$. La seconda è ovviamente soddisfatta poichè

$$\dot{\rho}(0) = \mathbf{e}_\rho \cdot \dot{\mathbf{r}}(0) = (0, -1, 0) \cdot (0, 0, 2v_0) = 0.$$

D'altra parte l'altra condizione dà l'equazione

$$d = \left(\frac{2md^2v_0^2}{k}\right)^{1/4},$$

che ha come soluzione

$$d = \sqrt{\frac{2m}{k}} v_0 \simeq 22\, cm.$$

Si noti che le condizioni che abbiamo imposto implicano automaticamente che $E = V_{\text{eff}}(\rho_m)$ cioè l'energia è proprio quella associata al punto di equilibrio stabile.
Il calcolo del periodo si fa osservando che la conservazione del momento angolare implica che la velocità angolare è

$$\dot{\vartheta}(t) = \dot{\vartheta}(0) = \frac{2L}{md^2} = \frac{2v_0}{d} \simeq 8.9\,\text{rad/s},$$

e quindi il periodo $T = 2\pi/\dot{\vartheta} \simeq 0.7\,\text{s}$.

Esercizio 3

Il sistema meccanico ammette un integrale primo del moto, ovvero l'energia meccanica

$$E = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 - (x-1)^2.$$

Notiamo al fine di determinare l'esistenza globale o meno della soluzione che il potenziale V è illimitato dal basso e quindi l'esistenza globale non segue dal teorema discusso a lezione. Tuttavia il potenziale è C^∞ su ogni compatto quindi resta solo da verificare se il corpo raggiunge l'infinito in tempi finiti. L'energia per i dati iniziali assegnati è $E = -\delta^2$ e il tempo che impiega la particella a raggiungere l'infinito è

$$\lim_{X\to\infty} \int_{1+\delta}^{X} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{2\,(-\delta^2 + (x-1)^2)}} = \lim_{X'\to\infty} \int_{\delta}^{X'} \mathrm{d}x' \, \frac{1}{\sqrt{2\,(-\delta^2 + (x')^2)}} = +\infty,$$

pertanto il moto è globale nel futuro (e, analogamente, è globale nel passato).
La soluzione esplicita si ottiene invertendo l'identità

$$t = \int_{1+\delta}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2\,(-\delta^2 + (x-1)^2)}} = \int_{\delta}^{x(t)-1} \frac{dx'}{\sqrt{2\,(-\delta^2 + (x')^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1}^{(x(t)-1)/\delta} \frac{dx''}{\sqrt{(x'')^2 - 1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arccosh}(x'')\Big|_{1}^{(x(t)-1)/\delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arccosh}\big(\frac{x(t)-1}{\delta}\big),$$

da cui otteniamo

$$x(t) = 1 + \delta \cosh(\sqrt{2}t). \tag{1}$$

Il punto di equilibrio $(1,0)$ è instabile, come segue (tra le altre cose) dalla soluzione esplicita appena trovata: infatti, per quanto δ sia piccolo (e, quindi, per quanto il dato iniziale sia vicino a $(1,0)$) la soluzione $(x(t), \dot{x}(t))$ si allontana indefinitamente da $(1,0)$, come evidente dalla (1).

Esercizio 4

Scegliamo il sistema di riferimento fisso con origine O nel centro della giostra, asse $\hat{z}$ ortogonale al disco della giostra e assi $\hat{x}$ e $\hat{y}$ scelti in modo che il sedile abbia coordinate $(R, 0, 0)$ al tempo $t = 0$. Prendiamo il sistema K in movimento con l'origine O' nel punto in cui si trova il sedile, asse $\hat{\eta}_3$ parallelo a $\hat{z}$ e asse $\hat{\eta}_1$ parallelo a $\hat{x}$ al tempo $t = 0$.

(a) L'angolo formato da $\hat{\eta}_1$ con $\hat{x}$ è $\vartheta(t) = \int_0^t \omega(t')dt'$, dove

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0, & \text{per } 0 \le t \le t_1, \\ \omega_0 - \alpha(t - t_1) & \text{per } t_1 \le t \le t_2, \\ 0 & \text{per } t \ge t_2, \end{cases}$$

quindi

$$\vartheta(t) = \begin{cases} \omega_0 t, & \text{per } 0 \le t \le t_1, \\ \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\alpha(t-t_1)^2 & \text{per } t_1 \le t \le t_2, \\ \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\alpha} & \text{per } t \ge t_2, \end{cases}$$

e $t_2 = t_1 + \omega_0/\alpha$. Ora, detta B_t la matrice

$$B_t = \begin{pmatrix} \cos\vartheta(t) & -\sin\vartheta(t) & 0 \\ \sin\vartheta(t) & \cos\vartheta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la posizione $\mathbf{r}(t)$ di O' in κ è data da

$$\mathbf{r}(t) = B_t \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: B_t\mathbf{R} = R \begin{pmatrix} \cos\vartheta(t) \\ \sin\vartheta(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità sono quindi (chiamando $\mathbf{q}$ e $\mathbf{Q}$ le coordinate rispettivamente in κ e K)

$$\mathbf{q}(t) = B_t\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t) = B_t\big[\mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}\big],$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = B_t\big[\dot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{\Omega}(t) \wedge \mathbf{Q}(t)\big] + \dot{\mathbf{r}}(t),$$

dove $\mathbf{\Omega}(t) = \omega(t)\hat{\eta}_3$ e

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = B_t\big[\mathbf{\Omega}(t) \wedge \mathbf{R}\big] = R\omega(t) \begin{pmatrix} -\sin\vartheta(t) \\ \cos\vartheta(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) La legge di Newton per la sferetta tenendo conto delle forze fittizie si scrive (definendo $\mathbf{G} = -g\hat{\eta}_3$)

$$m\ddot{\mathbf{Q}}(t) = m\mathbf{G} - mB_t^{-1}\ddot{\mathbf{r}}(t) - m\mathbf{\Omega}(t) \wedge (\mathbf{\Omega}(t) \wedge \mathbf{Q}(t)) - 2m\mathbf{\Omega}(t) \wedge \dot{\mathbf{Q}}(t) - m\dot{\mathbf{\Omega}}(t) \wedge \mathbf{Q}(t),$$

dove $B_t^{-1}\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{\Omega}(t) \wedge (\mathbf{\Omega}(t) \wedge \mathbf{R})$ e $\dot{\mathbf{\Omega}}(t) = \dot{\omega}(t)\hat{\eta}_3$ con

$$\dot{\omega}(t) = \begin{cases} 0, & \text{per } 0 \le t \le t_1, \\ -\alpha & \text{per } t_1 \le t \le t_2, \\ 0 & \text{per } t \ge t_2. \end{cases}$$

In componenti $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ la legge di Newton diventa

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 = \omega^2(t)(Q_1 + R) + 2\omega(t)\dot{Q}_2 + \dot{\omega}(t)Q_2, \\ \ddot{Q}_2 = \omega^2(t)Q_2 - 2\omega(t)\dot{Q}_1 - \dot{\omega}(t)Q_1, \\ \ddot{Q}_3 = -g. \end{cases}$$

Esercizio 5

Scegliamo anzitutto un sistema di coordinate con origine in O, asse $\hat{x}$ lungo OA e asse $\hat{y}$ lungo OB. L'asse $\hat{z}$ sarà perciò ortogonale al piano del triangolo. Si noti che la regione T occupata dal triangolo è, in formule, $T = \{(x, y, 0) : x, y \ge 0,\ y \le b\big(1 - \frac{x}{a}\big)\}$; la sua area è $A_T = \frac{1}{2}ab$.

(a) Dato che la lamina giace sul piano $z = 0$, si avrà necessariamente $z_{\text{cm}} = 0$. Calcoliamo invece le altre due coordinate:

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{A_T}\int_T dx\,dy\,x = \frac{2}{ab}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\,x = 2a\int_0^1 dx\,x(1-x) = \frac{a}{3} = 1\,\text{cm},$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{A_T}\int_T dx\,dy\,y = \frac{2}{ab}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\,y = b\int_0^1 dx\,(1-x)^2 = \frac{b}{3} = \frac{4}{3}\,\text{cm}.$$

(b) La matrice d'inerzia è a blocchi rispetto all'asse $\hat{z}$: dato che tutti i punti del corpo giacciono sul piano $z = 0$ si avrà

$$I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0,$$

il che in particolare implica che $\hat{z}$ è un asse principale di inerzia. Calcoliamo i restanti elementi della matrice:

$$I_{11} = \frac{2M}{ab} \int_T dxdy\, y^2 = \frac{2M}{ab} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\, y^2 = \frac{2}{3} Mb^2 \int_0^1 dx (1-x)^3 = \frac{Mb^2}{6} = \frac{800}{3}\, \mathrm{gr} \cdot \mathrm{m}^2,$$

$$I_{22} = \frac{2M}{ab} \int_T dxdy\, x^2 = \frac{2M}{ab} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\, x^2 = 2Ma^2 \int_0^1 dx\, x^2(1-x) = \frac{Ma^2}{6} = 150\, \mathrm{gr} \cdot \mathrm{m}^2,$$

$$I_{12} = I_{21} = -\frac{2M}{ab} \int_T dxdy\, xy = -\frac{2M}{ab} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\, xy = -Mab \int_0^1 dx\, x(1-x)^2 = -\frac{Mab}{12} = -100\, \mathrm{gr} \cdot \mathrm{m}^2,$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1250}{3}\, \mathrm{gr} \cdot \mathrm{m}^2.$$

(c) Per trovare i momenti principali di inerzia dobbiamo diagonalizzare la matrice I_{lm}: anzitutto abbiamo $I_3 = I_{33}$, mentre l'equazione secolare per gli altri due autovalori è

$$(800 - 3\lambda)(150 - \lambda) - 30000 = 0,$$

che ha come soluzioni

$$I_{1,2} = \frac{25}{3} \left(25 \mp \sqrt{193}\right) \mathrm{gr} \cdot \mathrm{m}^2.$$

Gli assi principali di inerzia sono l'asse $\hat{z}$ e gli autovettori relativi a $I_{1,2}$ ovvero i vettori della forma $(x, y, 0)$ con x, y soluzioni di

$$\begin{pmatrix} \frac{175}{3} \pm \frac{25}{3}\sqrt{193} & -100 \\ -100 & -\frac{175}{3} \pm \frac{25}{3}\sqrt{193} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

come per esempio

$$\mathbf{v}_{1,2} = \left(100, \tfrac{175}{3} \pm \tfrac{25}{3}\sqrt{193}, 0\right).$$

(d) Il momento $\mathbf{n}$ delle forze esterne rispetto a O è

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_{\mathrm{cm}} \wedge M\mathbf{g} = -Mg\,(x'_{\mathrm{cm}}, y'_{\mathrm{cm}}, z'_{\mathrm{cm}}) \wedge \mathbf{e}_{z'},$$

dove abbiamo scelto il sistema di coordinate con $\mathbf{g}$ lungo l'asse $\hat{z}'$ con il verso negativo. Si ottiene quindi

$$\mathbf{n} = Mg\,(y'_{\mathrm{cm}}, -x'_{\mathrm{cm}}, 0),$$

che si annulla solo quando $y'_{\mathrm{cm}}, x'_{\mathrm{cm}}$ sono entrambe nulle cioè quando $\mathbf{r}_{\mathrm{cm}}$ è allineato con $\mathbf{g}$. Ci sono pertanto ∞^2 posizioni di equilibrio date dalla condizione $\mathbf{r}_{\mathrm{cm}} = \pm|\mathbf{r}_{\mathrm{cm}}|\mathbf{e}_{z'}$ con il piano su cui giace il corpo passante per l'asse $\hat{z}'$.