Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/13

FM210 - Fisica Matematica I

Primo appello scritto [21-1-2013]

1. **(6 punti).** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta x + 8y + 1 \\ \dot{y} = -2x - \beta y + 2 \end{cases}$$

con $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Si stabilisca se, al variare del parametro β, esistono posizioni di equilibrio; se sí, le si determinino esplicitamente e se ne studi la stabilità.

(b) Per $\beta = 4$, si ricavi la soluzione corrispondente al dato iniziale $x(0) = y(0) = 0$.

(c) **[Facoltativo.]** Dopo aver verificato che il sistema assegnato è Hamiltoniano, si determini il corrispondente integrale primo del moto H; usando la conservazione di H, si riconosca che le traiettorie sono sempre delle coniche e se ne indichi il tipo al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. In particolare, a che tipo di traiettoria corrisponde la soluzione ricavata al punto precedente?

2. **(6 punti).** Si consideri un sistema composto da due sferette puntiformi di massa m legate da una molla armonica in presenza della gravità, descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = m\mathbf{g} - \partial_{\mathbf{x}_1} V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = m\mathbf{g} - \partial_{\mathbf{x}_2} V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \end{cases} \tag{1}$$

dove $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ e $V(\rho) = \frac{k}{2}\rho^2$, con $g > 0$ l'accelerazione di gravità e $k > 0$ la costante elastica della molla. Si supponga che all'istante iniziale: $\mathbf{x}_1(0) = (0, 0, h)$, $\mathbf{x}_2(0) = (0, d, h)$, $\dot{\mathbf{x}}_1(0) = (0, 0, v_0)$ e $\dot{\mathbf{x}}_2(0) = (0, 0, -v_0)$, con $h, d, v_0 > 0$.

(a) Si risolva esplicitamente il moto del centro di massa del sistema.

(b) Si determinino gli integrali primi per il moto della coordinata relativa $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ e se ne calcolino i valori corrispondenti ai dati iniziali assegnati; si identifichi il piano su cui si svolge il moto di $\mathbf{r}$.

(c) Supponendo: $m = 50$ gr, $g = 10$ m/s^2, $k = 2$ N/m, $v_0 = 1$ m/s e $h = 1$ m, si determini il valore di d tale che il moto della coordinata relativa sia un moto circolare uniforme, e si calcoli il periodo corrispondente.

3. **(6 punti).** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale $\ddot{x} = -V'(x)$, con $V(x) = -(x-1)^2$. Si risolva esplicitamente il moto con dato iniziale $x(0) = 1 + \delta$, $\dot{x}(0) = 0$, con $\delta > 0$. La soluzione esiste globalmente nel futuro e/o nel passato? Si discutano inoltre le conseguenze di tale soluzione per la stabilità del punto di equilibrio del sistema.

4. **(6 punti).** Una giostra ruota con velocità angolare costante $\omega_0 > 0$ fino al tempo $t_1 > 0$ quando il motore della giostra viene spento. Ad una distanza $R > 0$ dal centro si trova un sedile fissato alla giostra. Si supponga che, per $t \geq t_1$, la velocità angolare della giostra diminuisca secondo la legge $\omega(t) = \omega_0 - \alpha(t - t_1)$ con $\omega_0, \alpha > 0$ fino al fermarsi della giostra. Dopo aver scelto un sistema di riferimento fisso κ e uno in moto K solidale al sedile, si scrivano, per $t \geq 0$:

   i. le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità da K a κ;

   ii. le equazioni del moto in K (per componenti) per una sferetta di massa m soggetta alla forza di gravità e alle forze fittizie dovute al moto di K rispetto a κ.

5. **(6 punti).** Una lamina omogenea rigida di massa $M = 100$ gr ha la forma di un triangolo rettangolo di vertici O, A, B, con il lato OA di lunghezza $a = 3$ cm, il lato OB di lunghezza $b = 4$ cm, e il lato AB di lunghezza $c = 5$ cm. La lamina è incernierata al vertice O in modo da poter ruotare liberamente e senza attrito attorno ad esso.

   (a) Si determini la posizione del centro di massa del sistema.

   (b) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rispetto ad O.

   (c) Si calcolino gli assi e i momenti principali di inerzia del corpo rispetto ad O.

   (d) **[Facoltativo.]** In presenza della forza gravitazionale, si calcoli il momento delle forze esterne rispetto ad O e si determinino le posizioni di equilibrio del sistema.