

FM210 - FISICA MATEMATICA I

PRIMA PROVA SCRITTA [21-1-2013]

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Il sistema è della forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

La posizione di equilibrio del sistema è data da $\mathbf{x}_e = -A^{-1}\mathbf{b}$, se la matrice A è invertibile. Osserviamo che

$$\det(A) = \beta + 25,$$

per cui esiste *una sola* posizione di equilibrio per ogni $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq -25$.

Se invece $\beta = -25$, risolvendo il sistema si trova facilmente che i punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_e, y_e, z_e)$ sono tutti quelli per cui $y_e = 3z_e$ e $x_e + 4z_e + 5 = 0$ ovvero esistono *infinite* posizioni di equilibrio.

Per studiare la stabilità cerchiamo gli autovalori della matrice A : l'equazione secolare è

$$(1 - \lambda) [\lambda^2 - (1 + \beta)\lambda + \beta + 25],$$

che ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[1 + \beta \pm \sqrt{(1 - \beta)^2 - 100} \right], \quad \lambda_3 = 1.$$

Poiché esiste sempre un autovalore reale strettamente positivo i punti di equilibrio sono sempre *instabili*.

ESERCIZIO 2

I punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema $(\dot{q}, \dot{p}) = 0$ e quindi si trova immediatamente (usando la notazione compatta $\mathbf{x} = (q, p)$)

$$\mathbf{x}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{x}_2 = \left(\frac{2}{3}, 0\right).$$

Per studiarne la stabilità si può considerare il sistema linearizzato $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ e un rapido calcolo dà

$$A(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{4}{27}} \\ -2e^{-\frac{4}{27}} & 0 \end{pmatrix},$$

e, nel primo caso, gli autovalori sono $\pm\sqrt{2}$, mentre nel secondo sono immaginari puri. Nel caso di \mathbf{x}_1 possiamo quindi concludere che il punto è *instabile* poiché esiste un autovalore del linearizzato strettamente positivo. Nel caso di \mathbf{x}_2 invece il linearizzato non dà informazioni sulla stabilità del punti di equilibrio, poiché gli autovalori sono immaginari puri.

Osserviamo però che il sistema è Hamiltoniano ovvero esiste una costante del moto $H(q, p)$ tale che $\dot{q} = \partial_p H$ e $\dot{p} = -\partial_q H$. Tale costante è data per esempio da

$$H(q, p) = \left(\frac{1}{2}p^2 + 1\right) e^{q^3 - q^2} = \frac{p^2}{2} e^{q^3 - q^2} + e^{q^3 - q^2} =: \frac{p^2}{2} e^{q^3 - q^2} + V(q).$$

Inoltre la funzione $V(q) = e^{q^3 - q^2}$ ha un minimo locale proprio in $q = \frac{2}{3}$, mentre la funzione $\frac{1}{2}p^2 + 1$ ha un minimo assoluto proprio in $p = 0$. Questo suggerisce di applicare il teorema di Ljapunov con funzione di Ljapunov data da $W(q, p) = H(q, p) - H(\frac{2}{3}, 0)$. Si ha ovviamente $W(\frac{2}{3}, 0) = 0$ e $\dot{W} = 0$

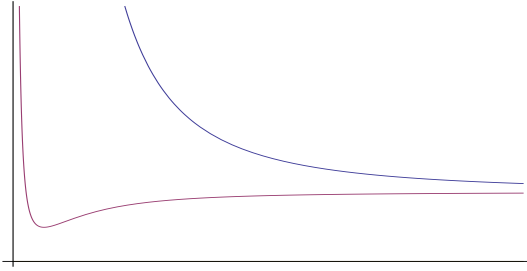


Figura 1: Potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$, $\rho > 0$ nei casi $\gamma \leq 1$ (blu) e $\gamma > 1$ (viola).

su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; inoltre, dal fatto che entrambe le funzioni $V(q)$ e $\frac{p^2}{2}e^{q^3 - q^2}$ hanno un minimo locale in \mathbf{x}_2 , si ottiene anche che $W(q, p) > 0$ per $(q, p) \neq \mathbf{x}_2$ in un intorno di \mathbf{x}_2 , che può essere scelto uguale a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Pertanto \mathbf{x}_2 è *stabile*.

ESERCIZIO 3

- (a) La posizione e la velocità del centro di massa $\mathbf{X}_{\text{cm}}(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t))$ al tempo $t = 0$ si ricavano dai dati iniziali:

$$\mathbf{X}_{\text{cm}}(0) = \left(\frac{1}{2}d, 0, 0\right), \quad \dot{\mathbf{X}}_{\text{cm}}(0) = \left(-\frac{1}{2}v_1, \frac{1}{2}v_2, 0\right).$$

La legge di Newton per il moto del centro di massa si ottiene sommando le due equazioni per \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 ed è semplicemente

$$2m\ddot{\mathbf{X}}_{\text{cm}}(t) = 2\mathbf{F},$$

la cui soluzione è

$$\mathbf{X}_{\text{cm}}(t) = \frac{1}{2} \left(d - v_1 t + \frac{1}{m} F_1 t^2, v_2 t + \frac{1}{m} F_2 t^2, 0 \right).$$

- (b) Gli integrali primi del moto nella coordinata relativa $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ sono l'energia E e il momento angolare \mathbf{L} (la massa ridotta è $\mu = \frac{1}{2}m$ e come al solito definiamo $\rho = |\mathbf{r}|$):

$$E = \frac{1}{4}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(\rho) = \frac{1}{4}m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho), \quad V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{m\rho^2},$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}.$$

Al tempo $t = 0$ abbiamo

$$\mathbf{r}(0) = (-d, 0, 0), \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = (v_1, -v_2, 0),$$

e quindi

$$E = \frac{1}{4}m(v_1^2 + v_2^2) + V(d), \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2}m(0, 0, v_2 d) = \frac{1}{2}mdv_2\mathbf{e}_z,$$

il che implica che il moto si svolge sul piano $\hat{x}\hat{y}$.

- (c) Per procedere con l'analisi qualitativa notiamo innanzitutto che con i dati iniziali assegnati L è sempre > 0 . Quindi:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = \alpha r_0.$$

Inoltre la derivata del potenziale efficace è

$$V'_{\text{eff}}(\rho) = \frac{\alpha r_0^3}{(\rho^2 + r_0^2)^{3/2}} - \frac{2L^2}{m\rho^3}.$$

Il comportamento della derivata dipende dal parametro

$$\gamma := \frac{m\alpha r_0^3}{2L^2},$$

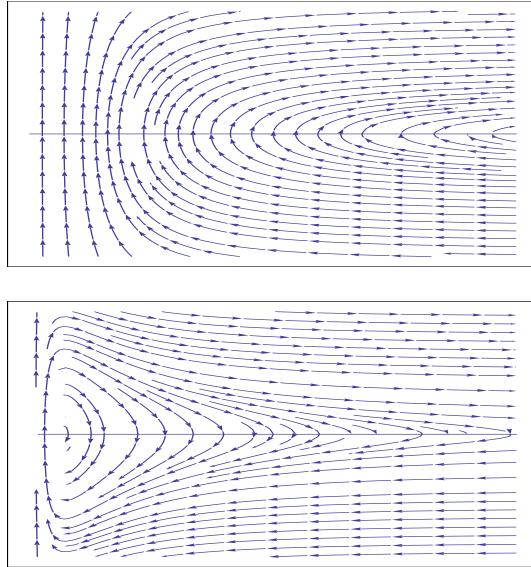


Figura 2: Orbite del moto radiale nei casi rispettivamente $\beta \leq 1$ e $\beta > 1$.

e più precisamente V'_{eff} è negativa per ogni ρ , se $\gamma \leq 1$, mentre si annulla per $\rho = \rho_{\min}$, se $\gamma > 1$, con

$$\rho_{\min} = \frac{r_0}{\sqrt{\gamma^{2/3} - 1}}.$$

Per $\gamma \leq 1$ c'è un solo valore critico dell'energia dato dall'asintoto orizzontale di V_{eff} ovvero αr_0 . Mentre se $\gamma > 1$ i valori critici sono αr_0 e $V_{\text{eff}}(\rho_{\min})$. Nel primo caso le orbite sono tutte aperte mentre nel secondo sono chiuse e periodiche per $V_{\text{eff}}(\rho_{\min}) \leq E < \alpha r_0$ e aperte altrimenti.

Il grafico del potenziale efficace e delle orbite sono rispettivamente in fig. 1 e 2. Le orbite del moto complessivo sono sempre aperte se $\gamma \leq 1$ mentre possono essere chiuse e periodiche se $\gamma > 1$, $V_{\text{eff}}(\rho_{\min}) \leq E < \alpha r_0$ ed è soddisfatta la condizione

$$\int_{\rho_-(E)}^{\rho_+(E)} d\rho \frac{4L}{m\rho^2 \sqrt{\frac{4}{m}(E - V_{\text{eff}}(\rho))}} = \frac{2\pi m}{n},$$

con $m, n \in \mathbb{N}$ e $\rho_{\pm}(E)$ punti di inversione del moto radiale di energia E .

- (d) Affinché il moto in \mathbf{r} sia circolare uniforme devono simultaneamente essere soddisfatte due condizioni, ovvero

$$\rho(0) = d = \rho_{\min}, \quad \dot{\rho}(0) = 0.$$

La seconda condizione è equivalente a $\hat{\mathbf{r}}(0) \cdot \dot{\mathbf{r}}(0) = 0$. D'altra parte, con i dati iniziali assegnati:

$$\hat{\mathbf{r}}(0) \cdot \dot{\mathbf{r}}(0) = (-1, 0, 0) \cdot (v_1, -v_2, 0) = -v_1 < 0,$$

e quindi non si può mai avere un moto circolare uniforme con i dati iniziali assegnati.

ESERCIZIO 4

Scegliamo il sistema di riferimento fisso con origine O nel fulcro del braccio, asse \hat{z} lungo la verticale e asse \hat{x} in modo che il galeone si muova sul piano \hat{x}, \hat{z} . Prendiamo il sistema K in movimento con l'origine O' nel punto in cui si trova Luigi, asse $\hat{\eta}_2$ parallelo a \hat{y} e asse $\hat{\eta}_1$ parallelo a \hat{x} al tempo $t = 0$. Si noti che la terna mobile è orientata come la terna fissa al tempo $t = 0$ mentre per tempi successivi solo l'asse $\hat{\eta}_2$ resta parallelo a \hat{y} . Per esempio l'asse $\hat{\eta}_1$ al tempo $t > 0$ forma con l'asse \hat{x} un angolo $\theta(t)$ così come l'asse $\hat{\eta}_3$ rispetto a \hat{z} . In altri termini, a parte una traslazione di $\mathbf{r}(t)$ (vedi sotto), la terna $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$ si ottiene dalla terna $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ con una rotazione di un angolo $\theta(t)$ attorno all'asse $\hat{y} \parallel \hat{\eta}_2$.

(a) Detta B_t la matrice

$$B_t = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & 0 & -\sin \theta(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta(t) & 0 & \cos \theta(t) \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbf{r}(t) = R \begin{pmatrix} \sin \theta(t) \\ 0 \\ -\cos \theta(t) \end{pmatrix} = -B_t \mathbf{R}, \quad \text{con } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$$

le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità sono (chiamando \mathbf{q} e \mathbf{Q} le coordinate di un punto generico P rispettivamente in κ e K):

$$\mathbf{q}(t) = B_t \mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t) = B_t [\mathbf{Q}(t) - \mathbf{R}],$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = B_t [\dot{\mathbf{Q}}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \wedge (\mathbf{Q}(t) - \mathbf{R})]$$

dove

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) = -\dot{\theta}(t) \hat{\eta}_2 = -\theta_0 \kappa \cos \kappa t \hat{\eta}_2.$$

(b) L'unica forza inerziale che agisce su Luigi, trovandosi nell'origine O' del sistema di riferimento K è la forza inerziale di traslazione $-m\ddot{\mathbf{r}}(t)$ e quindi, le risultante delle forze attive e inerziali agenti su Luigi, scritta nelle coordinate del sistema di riferimento fisso κ , è

$$-m(0, 0, g) + mR \begin{pmatrix} -\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \\ -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{pmatrix},$$

Analogamente, la forza su Luigi scritta nel sistema di riferimento K è

$$\mathbf{F}_{Luigi}(t) = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta(t) - mR\ddot{\theta}(t) \\ 0 \\ -mg \cos \theta(t) - mR\dot{\theta}^2(t) \end{pmatrix}.$$

Il modulo della forza su Luigi è

$$m\sqrt{R^2\ddot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^4 + g^2 + 2gR(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)}.$$

ESERCIZIO 5

Scegliamo anzitutto un sistema di coordinate con origine in O , asse \hat{x} lungo a asse \hat{y} lungo h . L'asse \hat{z} sarà perciò ortogonale al piano del trapezio. L'area del trapezio è $(a+b)h/2$, cosicché la densità di massa (costante) è uguale a

$$\rho = \frac{2M}{(a+b)h}.$$

Si noti anche che la regione T del piano $\hat{x}\hat{y}$ occupata dal trapezio è definita analiticamente nel modo seguente:

$$T = \{0 \leq y \leq h, 0 \leq x \leq a - \frac{a-b}{h}y\}.$$

(a) Dato che la lamina giace sul piano $z = 0$, si avrà necessariamente $z_{\text{cm}} = 0$. Calcoliamo invece le altre due coordinate:

$$x_{\text{cm}} = \frac{2}{(a+b)h} \int_0^h dy \int_0^{a-y(a-b)/h} dx x = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3(a+b)} = \frac{49}{24} \text{ cm},$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{2}{(a+b)h} \int_0^h dy \int_0^{a-y(a-b)/h} dx y = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)} = \frac{11}{6} \text{ cm}.$$

(b) La matrice d'inerzia è a blocchi rispetto all'asse \hat{z} : dato che tutti i punti del corpo giacciono sul piano $z = 0$ si avrà

$$I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0,$$

il che in particolare implica che \hat{z} è un asse principale di inerzia. Calcoliamo i restanti elementi della matrice:

$$I_{11} = \frac{2M}{(a+b)h} \int_0^h dy \int_0^{a-y(a-b)/h} dx y^2 = \frac{Mh^2(a+3b)}{6(a+b)} = \frac{1400}{3} \text{ gr} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_{22} = \frac{2M}{(a+b)h} \int_0^h dy \int_0^{a-y(a-b)/h} dx x^2 = \frac{M(a^2+b^2)}{6} = \frac{1700}{3} \text{ gr} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_{12} = I_{21} = -\frac{2M}{(a+b)h} \int_0^h dy \int_0^{a-y(a-b)/h} dx xy = -\frac{Mh(a^3+a^2b+ab^2-3b^3)}{12(a+b)^2} = -\frac{1025}{12} \text{ gr} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{3100}{3} \text{ gr} \cdot \text{m}^2.$$

Il calcolo dei momenti di inerzia dà

$$I_{1,2} = \left[\frac{1550}{3} \mp \frac{25}{12} \sqrt{2257} \right] \text{ gr} \cdot \text{m}^2, \quad I_3 = I_{33}.$$