Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/13

FM210 - Fisica Matematica I

Prima Prova Scritta [21-1-2013]

SOLUZIONI

Esercizio 1

Il sistema è della forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3-\alpha} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo anzitutto che

$$\det(A) = 0,$$

per ogni valore di $\alpha \neq \{0, 3\}$ per cui *non* si possono determinare le posizioni di equilibrio nella forma $\mathbf{x}_e = -A^{-1}\mathbf{b}$ (semplicemente perché A^{-1} non esiste). Verifichiamo esplicitamente se esistono altre posizioni di equilibrio, ovvero soluzioni del sistema

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b} = 0 \implies \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ \frac{1}{3-\alpha}x + z = -1, \\ \frac{2}{\alpha}y + z = 2, \end{cases}$$

che ammette soluzioni se e solo se $\alpha = 1$: ricavando x e y dalla seconda e terza equazione e sostituendole nella prima si ottiene infatti

$$0 = -3 + 3\alpha - (3-\alpha)z - \alpha z + 3z = -3 + 3\alpha,$$

che appunto richiede $\alpha = 1$. Si noti che lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere calcolando il rango della matrice $(A|\mathbf{b})$ e imponendo che fosse < 3 (condizione necessaria affinché il sistema non omogeneo con matrice singolare ammetta soluzione). Inoltre, si verifica immediatamente che se $\alpha = 1$ esistono infinite posizioni di equilibrio $\mathbf{x}_e$ che si trovano sulla retta parametrizzata come segue:

$$\begin{cases} x = -2t - 2 \\ y = -t/2 + 1 \\ z = t \end{cases} \tag{1}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

Per verificare la stabilità di tali punti fissi, calcoliamo gli autovalori di A:

$$-(1-\lambda)^2\lambda + 3 - 3(1-\lambda) = \left[-(1-\lambda)^2 + 3\right]\lambda = 0,$$

che ha come soluzioni

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

In ogni caso $\Re(\lambda_2) = 1 + \sqrt{3} > 0$. Pertanto i punti di equilibrio sulla retta Eq.(1) sono tutti *instabili.*

Esercizio 2

L'equazione del moto è

$$\ddot{x} = -1 - 2\cos x,$$

e l'integrale primo l'energia meccanica

$$E = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x).$$

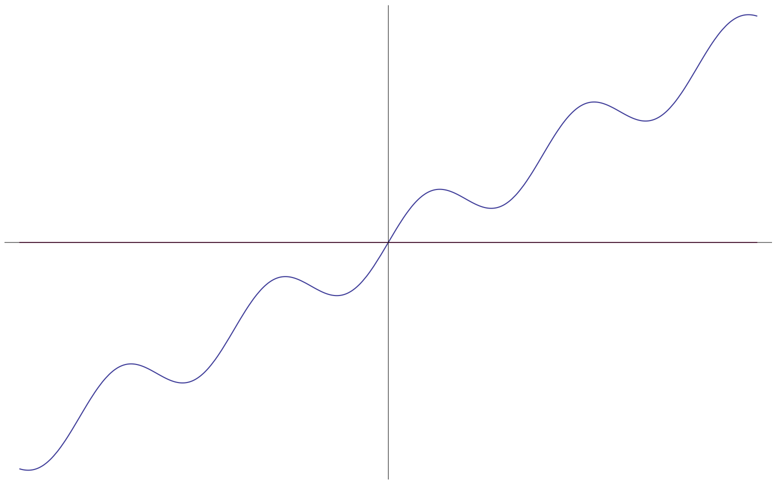

Figura 1: Potenziale $V(x)$.

(a) Osserviamo che $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = \pm\infty$ e la derivata $V'(x) = 1 + 2\cos x$ si annulla in infiniti punti

$$x_{M,k} := \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \qquad x_{m,k} := \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre dal calcolo della derivata seconda $V''(x) = -2\sin x$ si ottiene immediatamente che

$$V''(x_{M,k}) = -2\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) < 0, \qquad V''(x_{m,k}) = -2\sin\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) > 0,$$

ovvero $x_{M,k}$ sono punti di massimo locale mentre $x_{m,k}$ sono punti di minimo locale. Il grafico del potenziale è in fig.1.

(b) I punti di equilibrio del sistema sono ovviamente i punti criciti del potenziale $V(x)$, ovvero $x_{M,k}$ e $x_{m,k}$. I primi sono punti di equilibrio *instabile* in quanto massimi locali del potenziale mentre i secondi sono punti di equilibrio *stabile* in quanto minimi locali isolati.

(c) Cacoliamo anzitutto i valori critici dell'energia

$$E_{M,k} := V(x_{M,k}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \sqrt{3}, \qquad E_{m,k} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3},$$

e osserviamo che $E_{m,k} < E_{M,k} < E_{m,k+1}$. I dati iniziali che danno orbite *limitate* sono quelli con energia E tale che

$$E_{m,k} < E \leq E_{M,k-1},$$

per un certo $k \in \mathbb{Z}$, e il dato iniziale $x(0)$ soddisfa la condizione $x(0) \geq x_{M,k-1}$. Si noti che quest'ultima condizione è cruciale poiché le orbite associate a tali energie sono costituite da due componenti connesse disgiunte e solo una delle due (quella contenuta nella regione $x \geq x_{M,k-1}$) è limitata. Tutte queste orbite sono anche *periodiche* eccetto quella con energia esattamente uguale al valore critico $E = E_{M,k-1}$. L'orbita corrispondente corrisponde o al punto di equilibrio instabile oppure alla separatrice *aperiodica*.

(d) Il grafico delle orbite è in fig.2.

Esercizio 3

(a) L'energia meccanica è

$$E = \tfrac{1}{2} m\dot{\mathbf{x}}^2 + V(|\mathbf{x}|),$$

e la sua derivata temporale

$$\dot{E} = m\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}} + \partial_{\mathbf{x}} V(|\mathbf{x}|)\cdot\dot{\mathbf{x}} = qB\dot{\mathbf{x}}\cdot\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ -\dot{x}_1 \end{pmatrix} = qB\,(\dot{x}_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1\dot{x}_2) = 0.$$

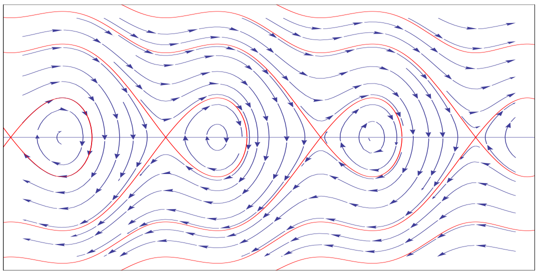

Figura 2: Orbite del moto con disegnate in rosso le separatrici.

(b) La derivata temporale di A è

$$\dot{A} = m\left(x_1\ddot{x}_2 - x_2\ddot{x}_1\right) + qB\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}} = -qB\left(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2\right) + x_1\partial_{x_2}V(|\mathbf{x}|) - x_2\partial_{x_1}V(|\mathbf{x}|) + qB\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}}$$
$$= x_1\partial_{x_2}V(|\mathbf{x}|) - x_2\partial_{x_1}V(|\mathbf{x}|) = 0$$

poiché per $i = 1, 2$

$$\frac{\partial V(|\mathbf{x}|)}{\partial x_i} = V'(|\mathbf{x}|)\frac{x_i}{|\mathbf{x}|}.$$

(c) Procediamo all'integrazione per quadratura:

(i) Usando le espressioni in coordinate polari $x_1 = \varrho\cos\vartheta, x_2 = \varrho\sin\vartheta$, abbiamo

$$A = m\varrho^2\dot{\vartheta} + \tfrac{1}{2}qB\varrho^2,$$

da cui si ricava

$$\dot{\vartheta} = \frac{A}{m\varrho^2} - \frac{qB}{2m}.$$

(ii) Usando l'espressione per $\dot{\vartheta}$ otteniamo

$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{\varrho}^2 + \tfrac{1}{2}m\varrho^2\dot{\vartheta}^2 + V(\varrho) = \tfrac{1}{2}m\dot{\varrho}^2 + \frac{\left(2A - qB\varrho^2\right)^2}{8m\varrho^2} + V(\varrho),$$

da cui l'espressione del potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\varrho) = \frac{\left(2A - qB\varrho^2\right)^2}{8m\varrho^2} + V(\varrho).$$

(iii) Osserviamo che si ha (per $A \neq 0$) $\lim_{\varrho\to 0} V_{\text{eff}}(\varrho) = +\infty$ e $\lim_{\varrho\to\infty} V_{\text{eff}}(\varrho) = +\infty$ per cui il potenziale efficace deve ammettere un minimo assoluto per $\varrho \in \mathbb{R}^+$. In effetti calcolando la derivata rispetto a ϱ si ottiene

$$V'_{\text{eff}}(\varrho) = 2\varrho\left[-\frac{A^2}{2m\varrho^4} + \frac{q^2B^2}{8m} + \frac{m\omega^2}{2}\right]$$

che sia annulla per $\varrho > 0$ in un solo punto

$$\varrho_m = \left[\frac{4A^2}{q^2B^2 + 4m^2\omega^2}\right]^{1/4},$$

che deve essere per quanto detto sopra necessariamente un minimo assoluto. Quindi ϱ_m è un punto di equilibrio stabile per il moto radiale e i dati iniziali

$$\varrho(0) = \varrho_m, \qquad E = V_{\text{eff}}(\varrho_m),$$

generano un moto circolare uniforme di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\vartheta}} = \frac{4\pi m\varrho_m^2}{2A - qB\varrho_m^2} = \frac{4\pi m}{\sqrt{q^2B^2 + 4m^2\omega^2} - qB}.$$

Esercizio 4

Osserviamo anzitutto che il corpo solido ammette un asse di simmetria di ordine 4 passante per il vertice della piramide e ortogonale alla base. Tale asse deve quindi essere un asse principale di inerzia. Scegliamo quindi covenientemente gli assi cartesiani con l'asse $\hat{z}$ lungo tale asse di inerzia, l'origine degli assi appartenente alla base della piramide e gli assi $\hat{x}$ e $\hat{y}$ paralleli ai lati della base della piramide. Ricordiamo inoltre che dato il volume della piramide la sua massa totale è

$$M = \tfrac{1}{3}\varrho\ell^2 h.$$

(a) Il centro di massa deve trovarsi sull'asse $\hat{z}$ per cui

$$x_{\mathrm{cm}} = y_{\mathrm{cm}} = 0.$$

Resta da calcolare z_{cm} e si ha

$$z_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M}\int_0^h \mathrm{d}z \int_{-\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)} \mathrm{d}y \int_{-\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)} \mathrm{d}x\, \varrho z = \frac{\varrho}{M}\int_0^h \mathrm{d}z\, \ell^2\left(1-\tfrac{z}{h}\right)^2 z = \tfrac{1}{4}h.$$

(b) Poiché l'asse di simmetria $\hat{z}$ ha ordine > 2, gli altri due assi principali di inerzia sono due assi ortogonali arbitrariamente scelti sul piano della base (per esempio $\hat{x}$ e $\hat{y}$).

(c) Il calcolo dei momenti di inerzia è

$$I_z = \int_0^h \mathrm{d}z \int_{-\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)} \mathrm{d}y \int_{-\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)} \mathrm{d}x\, \varrho(x^2+y^2) = \tfrac{1}{6}\rho\ell^4 \textstyle\int_0^h \mathrm{d}z\, \left(1-\tfrac{z}{h}\right)^4 = \tfrac{1}{30}\rho\ell^4 h,$$

$$I_x = I_y = \int_0^h \mathrm{d}z \int_{-\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)} \mathrm{d}y \int_{-\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{1}{2}\ell\left(1-\frac{z}{h}\right)} \mathrm{d}x\, \varrho(x^2+z^2) = \frac{1}{60}\rho\ell^2 h\left(2h^2+\ell^2\right).$$