

FM210 - FISICA MATEMATICA I

APPELLO SCRITTO [6-9-2013]

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Il sistema è della forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo gli autovalori della matrice A che sono soluzioni dell'equazione

$$(1 - \lambda)^3 + 2 - 3(1 - \lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0,$$

ovvero

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_{2,3} = 0.$$

La matrice è perciò singolare ($\det(A) = 0$) e quindi non invertibile.

L'autovettore corrispondente a λ_1 ha la forma (α, α, α) con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, e possiamo perciò fissare

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1).$$

Gli autovettori corrispondenti all'autovalore 0 sono invece della forma $(\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e almeno uno dei due non nullo. Possiamo quindi prendere

$$\mathbf{v}_2 = (1, 1, -2),$$

e scegliere \mathbf{v}_3 in modo che sia ortogonale a \mathbf{v}_1 , e.g.,

$$\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0).$$

La matrice è quindi diagonalizzabile, come avremmo dovuto aspettarci essendo A simmetrica reale.

La matrice del cambiamento di base P dalla base canonica a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

mentre la matrice del cambiamento di coordinate $Q = (P^T)^{-1}$ è

$$Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se quindi poniamo $\mathbf{y} = Q\mathbf{x}$, nelle nuove coordinate il sistema è della forma

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{y} + \mathbf{c},$$

con

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La soluzione nelle nuove coordinate è banale:

$$\mathbf{y}(t) = \left((y_1(0) + \frac{1}{3}) e^{3t} - \frac{1}{3}, y_2(0), y_3(0) \right),$$

che in generale nelle coordinate di partenza si può scrivere

$$\mathbf{x}(t) = \left[\left(a + \frac{1}{3} \right) e^{3t} - \frac{1}{3} \right] \mathbf{v}_1 + b \mathbf{v}_2 + c \mathbf{v}_3,$$

dove $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sono determinate dai dati iniziali, e più precisamente, se $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(0)$ è il dato iniziale:

$$a = \frac{1}{|\mathbf{v}_1|^2} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{v}_1, \quad b = \frac{1}{|\mathbf{v}_2|^2} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{6} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{v}_2, \quad c = \frac{1}{|\mathbf{v}_3|^2} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{v}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{v}_3.$$

Riguardo ai punti di equilibrio, osserviamo anzitutto che, poiché la matrice A è singolare, le posizioni di equilibrio *non* si possono determinare usando la formula $\mathbf{x}_e = -A^{-1}\mathbf{b}$, semplicemente perché A^{-1} non esiste. Verifichiamo esplicitamente se esistono altre posizioni di equilibrio, ovvero soluzioni del sistema

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b} = 0 \implies x + y + z = -1,$$

da cui ricaviamo che le posizioni di equilibrio sono della forma

$$\mathbf{x}_e = (\alpha, \beta, -1 - \alpha - \beta),$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. L'insieme di tali punti di equilibrio è un piano, descritto parametricamente da quest'ultima equazione. Dato che la matrice A ha un autovalore strettamente positivo, tali posizioni di equilibrio sono *instabili*.

ESERCIZIO 2

L'equazione del moto è

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{3\alpha}{\rho^4} \right] \frac{\mathbf{r}}{\rho},$$

con $\rho = |\mathbf{r}|$ e gli integrali primi sono il momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$$

e l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\rho) = \frac{1}{2} \dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho),$$

con

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^3} + \frac{L^2}{2\rho^2}.$$

(a) Osserviamo che $\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0^-$ e $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$. La derivata $V'_{\text{eff}}(\rho)$ si annulla dove

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{3\alpha}{\rho^4} - \frac{L^2}{\rho^3} = \frac{\rho^2 - L^2\rho + 3\alpha}{\rho^4} = 0$$

Pertanto i punti critici sono, se esistono, le soluzioni reali di $\rho^2 - L^2\rho + 3\alpha = 0$, ovvero

$$\rho_{M,m} = \frac{L^2 \mp \sqrt{L^4 - 12\alpha}}{2}.$$

Quindi: se $L^4 < 12\alpha$ *non* ci sono punti critici; se $L^4 = 12\alpha$ c'è un solo punto critico a $\rho_f = L^2/2 = \sqrt{3\alpha}$ dove V_{eff} ha un *flesso*; se $L^4 > 12\alpha$ V_{eff} ha un massimo locale in ρ_M e un minimo locale in ρ_m . In quest'ultimo caso, il massimo locale può corrispondere a un massimo assoluto o a un massimo relativo, a seconda del segno di $V_{\text{eff}}(\rho_M)$. Per stabilirlo, studiamo il segno di V_{eff} :

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{2\rho^2 - L^2\rho + 2\alpha}{2\rho^3}$$

si annulla in $\rho_{\pm} = \frac{1}{4}(L^2 \pm \sqrt{L^4 - 16\alpha})$ se $L^4 \geq 16\alpha$, altrimenti è sempre negativo; se $L^4 = 16\alpha$ il potenziale efficace si annulla solo in $\rho_0 = L^2/4 = \sqrt{\alpha}$ e per il resto è negativo; se $L^4 > 16\alpha$ il potenziale efficace è positivo tra ρ_- e ρ_+ e per il resto è negativo. In conclusione: se $12\alpha < L^4 < 16\alpha$, $V_{\text{eff}}(\rho_M) < 0$ e quindi ρ_M non è un massimo assoluto; se $L^4 \geq 16\alpha$, $V_{\text{eff}}(\rho_M) \geq 0$ e quindi ρ_M è un massimo assoluto.

Il grafico del potenziale efficace al variare di α, L si trova in fig. 1.

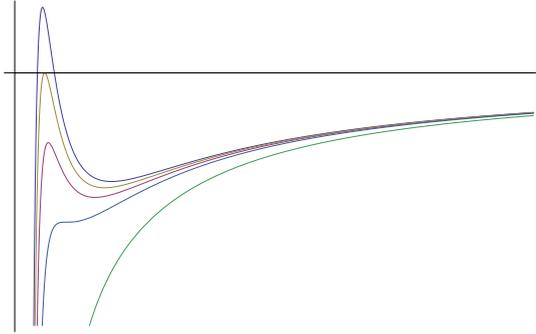


Figura 1: Potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$ nei casi $L^4 > 16\alpha$ (blu scuro), $L^4 = 16\alpha$ (giallo), $12\alpha < L^4 < 16\alpha$ (viola), $L^4 = 12\alpha$ (blu chiaro), e $L^4 < 12\alpha$ (verde).

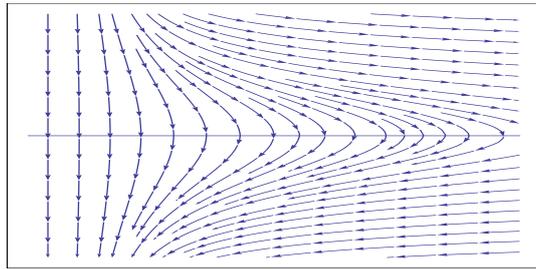


Figura 2: Orbite nel caso $L^4 < 12\alpha$.

- (b) I punti di equilibrio del moto radiale sono ovviamente i punti critici del potenziale $V_{\text{eff}}(\rho)$, ovvero $\rho_{M,m}$, se $L^4 > 12\alpha$, e ρ_f , se $L^4 = 12\alpha$. ρ_M e ρ_f sono punti di equilibrio *instabili* in quanto massimo locale e flesso del potenziale mentre ρ_m è un punto di equilibrio *stabile* in quanto minimo locale isolato.

I valori critici dell'energia del moto radiale sono $E_0 = V_{\text{eff}}(+\infty) = 0$ in tutti e tre i casi (asintoto orizzontale), $E_{M,m} = V_{\text{eff}}(\rho_{M,m})$, se $L^4 > 12\alpha$, e $E_f = V_{\text{eff}}(\rho_f)$, se $L^4 = 12\alpha$.

I grafici delle orbite del moto radiale nel piano delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$ nei diversi casi sono riportati in fig. 2, 3, 4, 5 e 6. La linea in rosso indica la separatrice con energia $E_M = V_{\text{eff}}(\rho_M)$; nei casi $12\alpha < L^4 < 16\alpha$ e $L^4 > 16\alpha$, viene anche indicata in verde la separatrice a energia nulla (nel caso $L^4 = 16\alpha$ queste due separatrici coincidono).

- (c) Orbite periodiche del moto radiale esistono solo se $L^4 > 12\alpha$. Se $12\alpha < L^4 < 16\alpha$ queste corrispondono a energie $E_m \leq E < E_M$; se $L^4 \geq 16\alpha$ corrispondono a energie $E_m \leq E < 0$. Con riferimento alle figure 4, 5 e 6, tali orbite sono: tutte quelle contenute nella componente destra (i.e., quella alla destra del punto di equilibrio instabile $(\rho_M, 0)$) della separatrice rossa in fig.4 e 5; tutte quelle contenute nella componente destra della separatrice verde in fig.6.

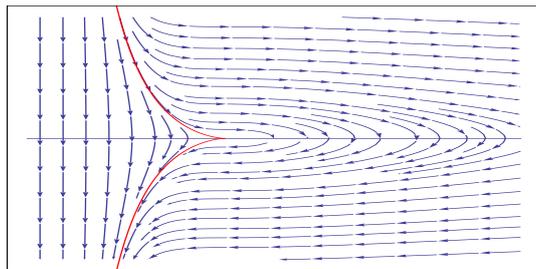


Figura 3: Orbite nel caso $L^4 = 12\alpha$.

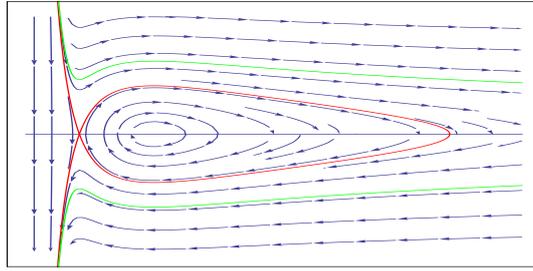


Figura 4: Orbite nel caso $12\alpha < L^4 < 16\alpha$.

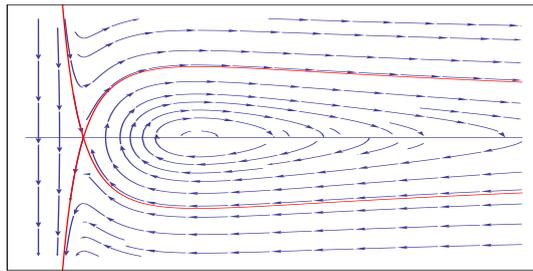


Figura 5: Orbite nel caso $L^4 = 16\alpha$.

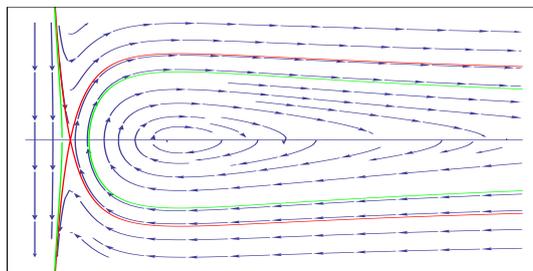


Figura 6: Orbite nel caso $L^4 > 16\alpha$.

(d) Possono esistere orbite periodiche del moto complessivo se $L^4 > 12\alpha$ e $E = E_m$ con $\rho(0) = \rho_m$ oppure $E_m < E < \min\{0, E_M\}$ ed è verificata la condizione $T_1/T_0 \in \mathbb{Q}$, dove:

- T_0 è il periodo del moto radiale, che è dato da

$$T_0 = 2 \int_{\rho_2}^{\rho_3} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}}$$

dove $\rho_{2,3}$ sono la seconda e terza radice dell'equazione $V_{eff}(\rho) = E$ (qui stiamo supponendo che le tre radici di $V_{eff}(\rho) = E$ siano ordinate $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$).

- T_1 è il secondo periodo del moto angolare (si ricordi che in generale il moto angolare è la sovrapposizione di due moti periodici, uno dei quali di periodo T_0), che è dato da

$$T_1 = T_0 \frac{\pi}{L} \left[\int_{\rho_2}^{\rho_3} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}} \right]^{-1}$$

In conclusione, la condizione affinché il moto complessivo sia periodico è che la quantità

$$L \int_{\rho_2}^{\rho_3} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}}$$

sia un multiplo razionale di π .

(e) Un caso in cui il moto esibisce una caduta verso il centro è quello in cui $E < E_m$ e il punto parte da fermo a distanza ρ_1 dall'origine, dove ρ_1 è l'unica radice di $E = V_{eff}(\rho)$. Il tempo di caduta T si calcola come:

$$T = \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}} = \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E + \frac{1}{\rho} - \frac{L^2}{2\rho^2} + \frac{\alpha}{\rho^3})}}$$

che è *finito*, poiché la funzione integranda è integrabile sia vicino a ρ_1 (dove si comporta come $(\text{cost.}) \times (\rho_1 - \rho)^{-1/2}$) sia vicino a 0 (dove si comporta come $(\text{cost.}) \times \rho^{3/2}$). Quindi in questo caso il moto non esiste globalmente.

ESERCIZIO 3

(a) L'equazione del moto del punto materiale P nel sistema di riferimento solidale con π è

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k(\mathbf{r} - \mathbf{d}) - m\omega^2 \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{r}) - 2m\omega \mathbf{e}_z \wedge \dot{\mathbf{r}},$$

dove abbiamo posto $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ e $\mathbf{d} = \overrightarrow{OC}$ e \mathbf{e}_z denota il versore unitario ortogonale a π uscente da O . Usando un sistema di assi cartesiani con origine in O e asse \hat{x} lungo \mathbf{d} , l'equazione del moto si scrive in componenti

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + kd + m\omega^2 x + 2m\omega \dot{y}, \\ m\ddot{y} = -ky + m\omega^2 y - 2m\omega \dot{x}. \end{cases}$$

(b) Le posizioni di equilibrio si caratterizzano per le condizioni $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ e $\dot{\mathbf{r}} = 0$, ovvero

$$\begin{cases} -kx + kd + m\omega^2 x = 0, \\ -ky + m\omega^2 y = 0, \\ \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Pertanto esiste un'unica posizione di equilibrio

$$\mathbf{r}_e = \frac{\mathbf{d}}{1 - \frac{m\omega^2}{k}},$$

se e solo se $m\omega^2 \neq k$. Se $m\omega^2 = k$ il sistema non ammette posizioni di equilibrio.

(c) Supponiamo che $\alpha := \omega^2 - k/m \neq 0$, e definiamo $\mathbf{r}' := \mathbf{r} - \mathbf{r}_e$. Le equazioni del moto si possono riscrivere nella forma

$$\begin{cases} \ddot{x}' = \alpha x' + 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' = \alpha y' - 2\omega \dot{x}' \end{cases}$$

Introducendo la variabile complessa $z = x' + iy'$, si trova $\ddot{z} + 2i\omega \dot{z} - \alpha z = 0$, la cui soluzione generale è $z(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}$, dove λ_{\pm} sono le radici di $\lambda^2 + 2i\omega\lambda - \alpha = 0$, ovvero

$$\lambda_{\pm} = -i\omega \pm \sqrt{-\omega^2 + \alpha}.$$

Ricordando che $\alpha = \omega^2 - k/m$, si ha che $-\omega^2 + \alpha = -k/m$, e quindi

$$\lambda_{\pm} = i\left(-\omega \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

È facile vedere che il punto di equilibrio è quindi stabile: i dati iniziali che partono vicino all'equilibrio corrispondono a valori piccoli di A e B , che producono moti che rimangono piccoli per tutti i tempi, semplicemente perché λ_{\pm} sono immaginari puri, e quindi $|e^{\lambda_{\pm} t}| = 1$. In altri termini, l'equilibrio è stabile, poiché il sistema è lineare e gli autovalori sono immaginari puri.

ESERCIZIO 4

Allo scopo di calcolare gli elementi di matrice del tensore di inerzia notiamo che con il sistema di coordinate scelto in figura il corpo occupa la regione

$$\left\{-\frac{1}{2}h \leq z \leq \frac{1}{2}h\right\} \times \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b(1-x/a)\}.$$

Abbiamo quindi (chiamando m la massa del corpo e usando che il suo volume è $\frac{1}{2}abh$):

$$I_{11} = \frac{2m}{abh} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy (y^2 + z^2) = \frac{m(h^2 + 2b^2)}{12},$$

$$I_{22} = \frac{2m}{abh} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy (x^2 + z^2) = \frac{m(h^2 + 2a^2)}{12},$$

$$I_{33} = \frac{2m}{abh} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy (x^2 + y^2) = \frac{m(a^2 + b^2)}{6},$$

$$I_{12} = I_{21} = -\frac{2m}{abh} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy xy = -\frac{mab}{12}$$

$$I_{23} = I_{32} = -\frac{2m}{abh} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy yz = 0$$

$$I_{13} = I_{31} = -\frac{2m}{abh} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy xz = 0$$

La matrice d'inerzia è quindi a blocchi:

$$I = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} h^2 + 2b^2 & -ab & 0 \\ -ab & h^2 + 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

I momenti principali di inerzia sono quindi $I_3 = I_{33} = \frac{m(a^2 + b^2)}{6}$, e i due autovalori del blocco 2×2 corrispondente alle direzioni 1 e 2, che si calcolano immediatamente in termini delle radici del polinomio caratteristico di $\begin{pmatrix} h^2 + 2b^2 & -ab \\ -ab & h^2 + 2a^2 \end{pmatrix}$:

$$[(h^2 + 2b^2 - \lambda)(h^2 + 2a^2 - \lambda) - a^2b^2] = 0 \implies \lambda = a^2 + b^2 + h^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4 - a^2b^2}$$

In conclusione

$$I_{1,2} = \frac{m}{12} [a^2 + b^2 + h^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4 - a^2b^2}], \quad I_3 = \frac{m}{6} (a^2 + b^2)$$

Il calcolo delle direzioni principali di inerzia procede analogamente: l'asse $\hat{\eta}_3$ coincide con \hat{e}_3 , mentre gli assi $\hat{\eta}_{1,2}$ vanno scelti come le direzioni caratteristiche di $\begin{pmatrix} h^2 + 2b^2 & -ab \\ -ab & h^2 + 2a^2 \end{pmatrix}$, che risultano essere

$$\hat{\eta}_{1,2} = \frac{1}{\mathcal{N}_{\pm}} \left(b^2 - a^2 \mp \sqrt{a^4 + b^4 - a^2b^2} \right)$$

dove

$$\mathcal{N}_{\pm} = \left[2(a^4 + b^4 - a^2b^2) \mp 2(b^2 - a^2)\sqrt{a^4 + b^4 - a^2b^2} \right]^{1/2}$$