Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/13

FM210 - Fisica Matematica I

Appello scritto [27-6-2013]

1. **(8 punti).** Sia dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/(3-\alpha) & 0 & 1 \\ 0 & 2/\alpha & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   con $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. Si stabilisca se, al variare di α, il sistema ammette punti di equilibrio. Se sí, li si determinino e se ne studi la stabilità.

2. **(8 punti).** Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove sulla retta $\mathbb{R}$ sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = x + 2 \sin x.$$

   Dopo aver scritto l'equazione del moto e aver determinato un integrale primo:

   (a) si disegni il grafico dell'energia potenziale,

   (b) si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità

   (c) si identifichino i dati iniziali che producono orbite limitate, e si discuta in quali casi i moto corrispondente è periodico o aperiodico.

   (d) **[Facoltativo.]** si completi lo studio qualitativo del moto disegnando, in particolare, le curve di livello nel piano $(x, \dot{x})$, e identificando i moti non limitati del sistema.

3. **(8 punti).** Un punto materiale di massa m e carica q si muove sul piano $\mathbb{R}^2$ sotto l'effetto di una forza conservativa centrale e di un campo magnetico costante ortogonale al piano. L'equazione del moto per la coordinata $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ della particella è:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = qB \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ -\dot{x}_1 \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(|\mathbf{x}|) ,$$

dove $B > 0$ è l'intensità del campo magnetico, $qB \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ -\dot{x}_1 \end{pmatrix}$ è la forza di Lorentz, e $V(|\mathbf{x}|)$ è il potenziale centrale.

(a) Si verifichi che, nonostante la presenza della forza di Lorentz, l'energia meccanica E del sistema è conservata.

(b) Si verifichi che, in aggiunta ad E, il sistema ammette un secondo integrale primo,

$$A = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) + \frac{1}{2} qB|\mathbf{x}|^2$$

(c) Usando la conservazione di E e di A, si integri il sistema per quadrature. Piú precisamente, se (ρ, θ) sono le coordinate polari associate alla variabile $\mathbf{x}$:

i. si scriva l'espressione di A in coordinate polari e si usi la legge di conservazione di A per esprimere $\dot{\theta}$ in termini della variabile radiale ρ.

ii. Si inserisca l'espressione di $\dot{\theta}$ trovata al punto precedente nella formula per l'energia meccanica, e si esprima cosí E come funzione $\dot{\rho}$ e ρ. Si determini il potenziale efficace del moto radiale.

iii. [**Facoltativo.**] Nel caso di potenziale armonico, $V(\rho) = \frac{m}{2}\omega^2\rho^2$, si esibisca un dato iniziale che produce un moto complessivo periodico, e se ne calcoli il periodo (si assuma $A \neq 0$).

4. **(6 punti).** Si consideri una piramide retta a base quadrata omogenea, di altezza h, lato di base ℓ e densità ρ.

(a) Si determini la posizione del centro di massa.

(b) Si identifichino gli assi principali di inerzia.

(c) [**Facoltativo.**] Si calcolino i momenti principali di inerzia.