

FM210 - FISICA MATEMATICA I

APPELLO SCRITTO [6-9-2013]

1. **(7 punti)**. Sia dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si risolva il sistema per dati iniziali generici. In particolare, si stabilisca se il sistema ammette punti di equilibrio. Se sí, li si determinino e se ne studi la stabilità.

2. **(12 punti)**. Un punto materiale di massa $m = 1$ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^3}$$

con $\alpha > 0$ e ρ la distanza del punto dal centro.

Dopo aver scritto l'equazione del moto e determinato gli integrali primi, si discutano i seguenti punti al variare dei parametri α ed L , dove L è il modulo del momento angolare del sistema.

- (a) Disegnare il grafico del potenziale efficace.
- (b) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (c) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (d) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

Inoltre, discutere un caso in cui i parametri e i dati iniziali siano fissati in modo da avere un moto di caduta verso il centro (i.e. un moto asintotico all'origine) e verificare se il tempo di caduta è finito o infinito.

3. (5 punti).

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su un piano orizzontale π che si muove di moto rotatorio uniforme attorno a un asse verticale incidente il piano nel punto O . Il punto P è soggetto, oltre che alle forze fittizie indotte dal moto rotatorio del piano, anche ad una forza elastica $\vec{F} = -k\vec{CP}$ con centro $C \neq O$ solidale al piano π .

- (a) Scrivere per componenti l'equazione vettoriale del moto di P nel riferimento solidale a π .
- (b) Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del sistema.
- (c) [Facoltativo]. Nei casi in cui esistono posizioni di equilibrio, si risolva il moto esplicitamente e si discuta la stabilità dei punti fissi.

4. (6 punti). Un solido omogeneo ha la forma di un prisma retto di altezza h che ha per base un triangolo rettangolo i cui cateti hanno lunghezza a e b . Siano P e Q i vertici delle due basi corrispondenti all'angolo retto, e sia M il punto medio dello spigolo PQ . Determinare i momenti principali d'inerzia rispetto a M e [Facoltativo] i corrispondenti assi d'inerzia.

