Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/13

FM210 - Fisica Matematica I

Seconda Prova di Esonero [14-1-2013]

SOLUZIONI

Esercizio 1

(a) La coordinata del centro di massa è data da $\mathbf{X}_{\text{cm}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ e la relativa equazione di Newton è, data l'assenza di forze esterne al sistema, $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{cm}} = 0$, da cui segue

$$\mathbf{X}_{\text{cm}}(t) = \mathbf{X}_{\text{cm}}(0) + \dot{\mathbf{X}}_{\text{cm}}(0)t.$$

I dati iniziali implicano

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{\text{cm}}(0) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1(0) + \mathbf{x}_2(0)) = \left(\frac{1}{2}d_0, 0, 0\right), \\ \dot{\mathbf{X}}_{\text{cm}}(0) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}_1(0) + \dot{\mathbf{x}}_2(0)) = \left(0, \frac{1}{2}v_0, 0\right), \end{cases}$$

e quindi si ha

$$\mathbf{X}_{\text{cm}}(t) = \left(\frac{1}{2}d_0, \frac{1}{2}v_0 t, 0\right).$$

(b) La coordinata relativa $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ soddisfa l'equazione di Newton

$$\frac{1}{2}m\ddot{\mathbf{r}} = -\partial_{\mathbf{r}} V(|\mathbf{r}|).$$

Notare che la massa ridotta è infatti data da $\mu^{-1} = m^{-1} + m^{-1}$ ovvero $\mu = \frac{1}{2}m$.

i. Poiché il potenziale $V(\rho)$ (con $\rho = |\mathbf{r}|$) è centrale, le grandezze conservate del moto nella coordinata relativa sono l'energia E e il momento angolare $\mathbf{L}$:

$$E = \frac{1}{4}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \alpha \arctan\left(\frac{\rho^2}{r_0^2}\right) = \frac{1}{4}m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho), \qquad V_{\text{eff}}(\rho) = \alpha \arctan\left(\frac{\rho^2}{r_0^2}\right) + \frac{L^2}{m\rho^2},$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}.$$

Usando i dati iniziali abbiamo $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = (d_0, 0, 0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_1(0) - \dot{\mathbf{x}}_2(0) = (0, v_0, 0)$ e quindi

$$E = \frac{1}{4}mv_0^2 + \alpha \arctan\left(\frac{d_0^2}{r_0^2}\right), \qquad \mathbf{L} = \frac{1}{2}md_0 v_0 \hat{\mathbf{z}},$$

che in particolare implica che il moto si svolge sul piano ortogonale a $\mathbf{L}$ ovvero il piano x, y. Si noti anche che $L = \frac{1}{2}md_0 v_0 \neq 0$ per ipotesi sui dati iniziali.

ii. I grafici del potenziale efficace e delle orbite sono in fig. 1 e 2. Si noti in particolare che il comportamento del potenziale efficace dipende dal parametro

$$\beta := \frac{m\alpha r_0^2}{L^2} = \frac{4\alpha r_0^2}{md_0^2 v_0^2},$$

e $V_{\text{eff}}(\rho)$ è una funzione monotona decrescente se $\beta \leq 1$. Inoltre $\lim_{\rho \to 0} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$ per ogni valore dei parametri (poiché $L > 0$ con i dati iniziali assegnati) e $\lim_{\rho \to 0} V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{\pi}{2}\alpha$. Invece se $\beta > 1$ esiste un minimo assoluto isolato per $\rho = \rho_m$ con

$$\rho_m = \frac{r_0}{(\beta - 1)^{1/4}}.$$

I valori critici dell'energia sono quindi, se $\beta \leq 1$, solo $\frac{\pi}{2}\alpha$, mentre se $\beta > 1$, $\frac{\pi}{2}\alpha$ e $V_{\text{eff}}(\rho_m)$.
Le orbite sono perciò sempre illimitate e aperiodiche nel caso $\beta \leq 1$ mentre per $\beta > 1$ le orbite sono illimitate e aperiodiche per $E \geq \frac{\pi}{2}\alpha$ e limitate $V_{\text{eff}}(\rho_m) \leq E < \frac{\pi}{2}\alpha$. In quest'ultimo caso il moto radiale è sempre periodico, mentre il moto complessivo può essere periodico o quasi-periodico, a seconda della scelta dei dati iniziali e del corrispondente rapporto tra il periodo del moto radiale e angolare (se razionale il moto è periodico, se irrazionale è quasi-periodico).

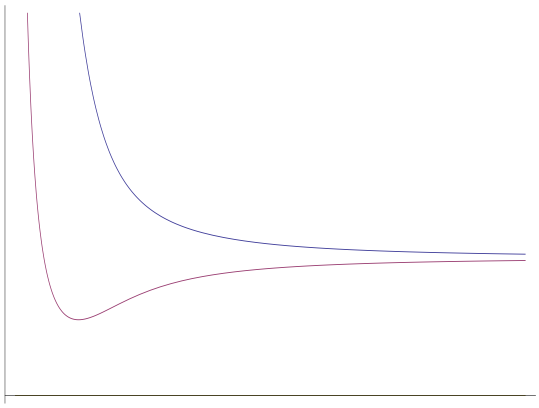

Figura 1: Potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$, $\rho > 0$ nei casi $\beta \leq 1$ (blu) e $\beta > 1$ (viola).

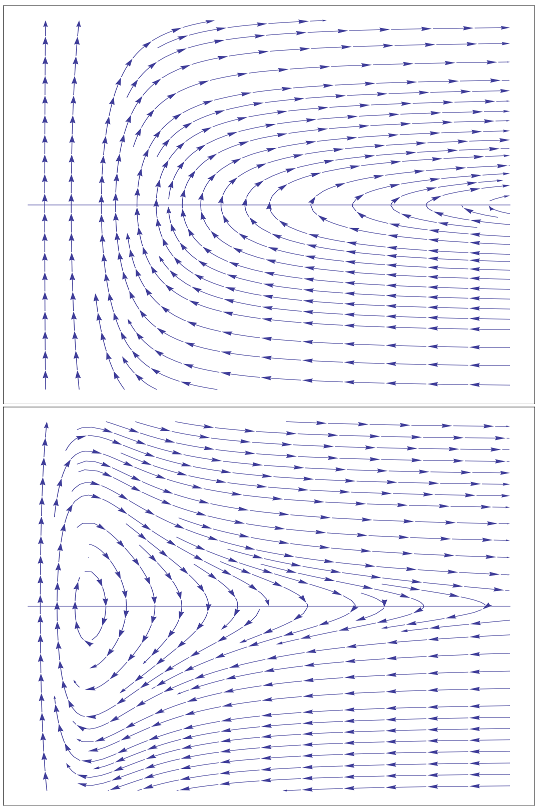

Figura 2: Orbite nei casi rispettivamente $\beta \leq 1$ e $\beta > 1$.

iii. Affinché il moto sia circolare uniforme, la coordinata radiale deve trovarsi al tempo $t = 0$ nella posizione di equilibrio del potenziale efficace (quindi si deve avere $\beta > 1$) con velocità radiale nulla. La condizione che la velocità radiale all'istante iniziale sia nulla è equivalente a

$$\mathbf{r}(0) \cdot \dot{\mathbf{r}}(0) = 0 = (d_0, 0, 0) \cdot (0, v_0, 0),$$

che è sempre verificata. Invece la prima condizione diventa (ricordiamo che $\beta > 1$)

$$d_0 = \rho(0) = \rho_m = \frac{r_0}{(\beta - 1)^{1/4}},$$

che ha soluzione solo nel caso in cui $\frac{mv_0^2}{2\alpha} < 1$, nel qual caso

$$d_0 = r_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_0^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{m^2 v_0^4}{4\alpha^2}}\right)}.$$

Il periodo del moto è

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\vartheta}} = \frac{\pi m \rho^2(0)}{L} = \frac{2\pi d_0}{v_0}.$$

Esercizio 2

Fissiamo il sistema di riferimento fisso κ in modo che al tempo $t = 0$ la sua origine O_κ coincida con il centro della base dell'ascensore, con l'asse $\hat{z}$ diretto lungo la verticale verso l'alto e gli assi $\hat{x}$ e $\hat{y}$ scelti arbitrariamente sul piano $\perp \hat{z}$. Prendiamo l'origine O_K del sistema in movimento K coincidente con il centro del disco di base dell'ascensore (così che $O_\kappa = O_K$ al tempo $t = 0$). Scegliamo inoltre $\hat{\eta}_3 \equiv \hat{z}$ e $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ coincidenti all'istante iniziale con le direzioni $\hat{x}, \hat{y}$. Si noti che la posizione $\mathbf{r}(t)$ di O_K rispetto a O_κ, scritta nelle coordinate del sistema di riferimento κ, è data da

$$\mathbf{r}(t) = \left(0, 0, \tfrac{1}{2}at^2\right).$$

(a) Le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità sono rispettivamente (chiamando $\mathbf{q}$ e $\mathbf{Q}$ le coordinate rispettivamente in κ e K)

$$\mathbf{q}(t) = B_t \mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t),$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = B_t \Big[\dot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}(t)\Big] + \mathbf{r}(t),$$

dove

$$B_t = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$.

(b) La legge di Newton per la sferetta tenendo conto delle forze fittizie si scrive

$$m\ddot{\mathbf{Q}}(t) = m\mathbf{g} - m\ddot{\mathbf{r}}(t) - m\omega^2 \hat{\eta}_3 \wedge (\hat{\eta}_3 \wedge \mathbf{Q}(t)) - 2m\omega \hat{\eta}_3 \wedge \dot{\mathbf{Q}}(t),$$

dove $\mathbf{g} = -g\hat{\eta}_3$ e $\ddot{\mathbf{r}} = a\hat{\eta}_3$. Scritte per componenti, tali equazioni diventano

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 = \omega^2 Q_1 + 2\omega \dot{Q}_2, \\ \ddot{Q}_2 = \omega^2 Q_2 - 2\omega \dot{Q}_1, \\ \ddot{Q}_3 = -(g + a). \end{cases}$$

(c) Notiamo anzitutto che l'equazione per Q_3 è disaccoppiata e la sua soluzione è banalmente

$$Q_3(t) = h - \tfrac{1}{2}\,(g+a)\,t^2.$$

Per risolvere le altre due equazioni è conveniente passare a coordinate complesse $z(t) := Q_1(t) + iQ_2(t)$, così che le due equazioni si riducono alla sola

$$\ddot{z} + 2i\omega\dot{z} - \omega^2 z = 0,$$

la cui più generale soluzione è della forma

$$z(t) = e^{-i\omega t}(At+B),$$

con $A, B \in \mathbb{C}$. Infatti l'equazione $\lambda^2 + 2i\omega\lambda - \omega^2 = (\lambda + i\omega)^2$ ammette un'unica soluzione $\lambda = -i\omega$. Scegliendo opportunamente gli assi $\hat{\eta}_1$ e $\hat{\eta}_2$ del sistema K, possiamo assumere che i dati iniziali del moto della sferetta siano $\mathbf{Q}(0) = (R, 0, h)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0) = 0$. Pertanto $z(0) = R$ e $\dot{z}(0) = 0$, che implicano $B = R$ e $A = i\omega R$ e quindi $z(t) = Re^{-i\omega t}(1 + i\omega t)$ o, equivalentemente,

$$\begin{cases} Q_1(t) = R(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t), \\ Q_2(t) = R(-\sin\omega t + \omega t\cos\omega t). \end{cases}$$

(d) La deviazione dalla verticale, in coordinate complesse, prende la forma

$$\delta = z(t_0) - R = R\big[e^{-i\omega t_0}(1 + i\omega t_0) - 1\big] = R\big[(\cos\omega t - 1 + \omega t\sin\omega t) + i(-\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)\big],$$

dove t_0 è il tempo di caduta, ovvero $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g+a}}$. Con i dati forniti si ha

$$t_0 \simeq \sqrt{\frac{2}{12}}\,\mathrm{s} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{s} \simeq 0.4\ \mathrm{s}$$

e $\omega t_0 \simeq 0.04 \ll 1$. Sviluppandon δ in serie di Taylor rispetto al paramtero piccolo ωt_0 troviamo:

$$\delta = z(t_0) - R = R\Big[\frac{(\omega t_0)^2}{2} + \cdots\Big] \simeq \frac{1}{4} \times (4 * 10^{-2})^2\,\mathrm{m} = 0.4\,\mathrm{mm}$$

Poiché δ è reale, a meno di termini di ordine superiore, la deflessione è in direzione radiale uscente nel sistema di riferimento K.

Esercizio 3

Scegliamo anzitutto un sistema di coordinate con orgine nel centro dell'anello, asse $\hat{z}$ ortogonale all'asse dell'anello e asse $\hat{x}$ passante per il diametro su cui si trovano le due pietre in modo che la pietra di massa m si trovi nel punto $(R, 0, 0)$ e la pietra di massa $2m$ in $(-R, 0, 0)$.

(a) Notiamo che l'asse $\hat{x}$ è un asse di simmetria per il corpo rigido di ordine 2 e di conseguenza è anche un asse principale di inerzia. Il centro di massa dovrà quindi trovarsi su di esso e ne deduciamo che $y_{\mathrm{cm}} = 0$ e $z_{\mathrm{cm}} = 0$. Resta da calcolare x_{cm}:

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{4m}(mR + 2m(-R) + m\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}R\cos\theta) = -\frac{R}{4}$$

(b) Vogliamo ora calcolare la matrice d'inerzia rispetto a $\mathbf{X}_{\mathrm{cm}} = \big(-\frac{1}{4}R, 0, 0\big)$, nel sistema di riferimento con assi paralleli agli assi $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ definiti sopra e passanti per $\mathbf{X}_{cm}$ stesso (chiamiamo $\hat{\eta}_1, \hat{\eta})2, \hat{\eta}_3$ tali assi). Dato che $\hat{\eta}_1$ è asse di simmetria di ordine 2 del sistema, è automaticamente anche un asse d'inerzia. Quindi la matrice d'inerzia è diagonale a blocchi rispetto a $\hat{\eta}_1$, ovvero gli unici elementi di matrice non diagonali non nulli sono a priori solo gli elementi $I_{23} = I_{32}$. D'altra parte, dato che tutti i punti del copro hanno coordinata lungo $\hat{\eta}_3$ nulla, tali elementi sono ovviamente nulli. In conclusione, la matrice d'inerzia rispetto a $\mathbf{X}_{cm}$ è diagonale rispetto ai tre assi $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$, che risultano quindi essere i tre assi principali di inerzia . I momenti di inerzia rispetto a tali assi sono:

$$I_1 = m\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}R^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}mR^2,$$

$$I_2 = m\left(\frac{5}{4}R\right)^2 + 2m\left(\frac{3}{4}R\right)^2 + \left[\frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right] = \frac{13}{4}mR^2$$
$$I_3 = m\left(\frac{5}{4}R\right)^2 + 2m\left(\frac{3}{4}R\right)^2 + \left[mR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right] = \frac{15}{4}mR^2$$

Si noti che: (1) I_1 coincide con il momento di inerzia di un anello sottile rispetto al suo diametro, poiché le masse m e $2m$ si trovano su $\hat{\eta}_1$ stesso; (2) nel calcolo di I_2 e I_3 abbiamo calcolato separatamente il contributo delle due masse puntiformi agli estremi del diametro su $\hat{\eta}_1$ e quello dovuto all'anello sottile; inoltre per calcolare il contributo dovuto all'anello sottile abbiamo usato il teorema di Huygens-Steiner.