

FM210 - FISICA MATEMATICA I

SECONDA PROVA DI ESONERO [14-1-2013]

1. **(12 punti)**. Due particelle di massa  $m$  si muovono in  $\mathbb{R}^3$  sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale  $V(\rho)$ :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = -\partial_{\mathbf{x}_1} V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = -\partial_{\mathbf{x}_2} V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \end{cases}$$

dove

$$V(\rho) = \alpha \arctan\left(\frac{\rho^2}{r_0^2}\right),$$

e  $\alpha, r_0 > 0$ . Si supponga che all'istante iniziale:  $\mathbf{x}_1 = (d_0, 0, 0)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_1 = (0, v_0, 0)$ ,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}$ , con  $d_0, v_0 > 0$ .

- (a) Si risolva esplicitamente il moto del centro di massa del sistema.
  - (b) Si studi e si descriva il moto della coordinata relativa  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  del sistema. In particolare:
    - i. si determinino gli integrali primi per il moto relativo e se ne calcolino i valori in termini di  $d_0$  e  $v_0$ ; si identifichi il piano su cui si svolge il moto di  $\mathbf{r}$ ;
    - ii. al variare degli integrali primi (sempre supponendo  $d_0, v_0 > 0$ ), si disegni il grafico del potenziale efficace, si disegnino le curve di livello nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ , e si discuta la natura qualitativa del moto complessivo.
    - iii. **[Facoltativo]**. Si determini una condizione su  $d_0, v_0$  affinché il moto della coordinata relativa sia un moto circolare uniforme, e si calcoli il periodo corrispondente.
2. **(10 punti)**. Un ascensore cilindrico, partendo da fermo, sale lungo la verticale con accelerazione costante  $a > 0$  e al contempo ruota attorno al proprio asse con velocità angolare costante  $\omega > 0$ . Dopo aver individuato un sistema di riferimento fisso  $\kappa$  e un sistema di riferimento mobile  $K$  solidale con l'ascensore,
- (a) si scrivano le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità da  $\kappa$  a  $K$ ;
  - (b) si scrivano (per componenti) le equazioni del moto in  $K$  per una sferetta di massa  $m$  soggetta alla forza di gravità e alle forze fittizie dovute al moto di  $K$  rispetto a  $\kappa$ ;
  - (c) si risolvano tali equazioni nel caso in cui la sferetta è lasciata cadere da ferma, da altezza  $h$ , ad una distanza iniziale  $R > 0$  dall'asse dell'ascensore.
  - (d) **[Facoltativo]**. Nel contesto del punto precedente, si determini la deflessione dalla verticale al punto di impatto e la si stimi numericamente, supponendo  $h = 1$  m,  $R = 50$  cm,  $a = 2$  m/s<sup>2</sup> e  $\omega = 0.1$  rad/s. In quale direzione ha deviato la sferetta?

3. (**8 punti**). Sia dato un corpo rigido formato da un anello sottile omogeneo di massa  $m$ , raggio  $R$  e spessore trascurabile, su cui sono saldate due pietre di massa  $m$  e  $2m$  agli estremi opposti di un diametro dell'anello.
- (a) Si trovi la posizione del centro di massa del corpo.
  - (b) Si trovino gli assi e i momenti principali di inerzia rispetto al centro di massa.