

FM210 - FISICA MATEMATICA I

PROVA PRE-ESONERO [9-1-2013]

1. Una particella di massa  $m$  si muove in  $\mathbb{R}^3$  sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale  $V(\rho)$ :

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\partial_{\mathbf{x}}V(|\mathbf{x}|)$$

con

$$V(\rho) = -\frac{A}{\rho^\alpha},$$

con  $A, \alpha > 0$ .

- (a) Si determinino gli integrali primi del moto.
- (a) Al variare di  $\alpha$  in  $(0, +\infty)$  e del momento angolare  $L$ , supponendo  $L \neq 0$ :
- si disegni il grafico del potenziale efficace;
  - si disegnino le curve di livello nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ ;
  - si determinino valori delle grandezze conservate per cui il moto complessivo del sistema è periodico e si calcoli il periodo corrispondente in termini di un integrale definito.
2. Una lamina omogenea a forma di triangolo isoscele con angolo al vertice di  $\pi/6$  è incernierata al vertice  $O$  in modo da poter ruotare liberamente e senza attrito attorno ad esso.
- Si determini la posizione del centro di massa del sistema.
  - Si determinino gli assi principali di inerzia rispetto ad  $O$ .
  - Si calcolino i momenti principali di inerzia rispetto ad  $O$ .
  - Si identifichino le rotazioni stazionarie del corpo attorno ad  $O$ , nell'ipotesi di assenza di forze esterne.
  - In presenza della forza gravitazionale, si calcoli il momento delle forze esterne rispetto ad  $O$ ; inoltre, si determinino le posizioni di equilibrio del corpo.
3. Una giostra al luna park è costituita da una piattaforma orizzontale rotante attorno al suo asse verticale a velocità angolare costante  $\omega_0$ , sulla quale sono incernierate delle tazzine, libere di ruotare attorno ai loro assi, che sono mantenuti fissi rispetto alla piattaforma. Si supponga che ogni tazzina ruoti attorno al suo asse a velocità angolare costante  $\Omega_1$  rispetto alla piattaforma. Si scelgano due sistemi di riferimento, uno fisso  $\kappa$  rispetto al terreno, e uno mobile solidale con una tazzina, supposta a distanza  $R_0$  dal centro della piattaforma della giostra.
- Si determini la legge di trasformazione delle coordinate da  $\kappa$  a  $K$ .
  - Si determini la legge di trasformazione delle velocità da  $\kappa$  a  $K$ .
  - Si determini la legge di trasformazione delle accelerazioni da  $\kappa$  a  $K$ .

- (d) Si determinino le forze fittizie che agiscono su un punto materiale di massa  $m$  nel sistema di riferimento  $K$ .
- (e) [**Facoltativo.**] Si consideri in  $K$  un pendolo costituito da un filo inestensibile di lunghezza  $\ell$  e da una massa puntiforme  $m$  fissata alla sua estremità, il cui punto di sospensione si trova sull'asse verticale della tazza. La massa  $m$  si muove in  $K$  sotto l'effetto delle forze attive (forza di gravità e tensione del filo) e delle forze fittizie ricavate nel punto precedente. Si stabilisca se il pendolo ammette punti di equilibrio e, in caso, li si determini.