Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/13

# FM210 - Fisica Matematica I

Secondo appello scritto [11-2-2013]

1. **(4 punti).** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4z + 5, \\ \dot{y} = y - 3z \\ \dot{z} = -4x + 3y + \beta z - 20 \end{cases}$$

   con $\beta \in \mathbb{R}$. Si stabilisca se, al variare del parametro $\beta$, esistono posizioni di equilibrio; se sí, se ne determini il numero e se ne studi la stabilità.

2. **(4 punti).** Dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{q} = p e^{q^3 - q^2}, \\ \dot{p} = q e^{q^3 - q^2}(p^2 - 3q + 2 - \frac{3}{2}p^2 q), \end{cases}$$

   si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità .

3. **(10 punti).** Due sferette puntiformi di massa $m$ si muovono sotto l'effetto di una forza eterna costante $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$ con $F_1, F_2 > 0$ e a una forza di attrazione reciproca centrale di potenziale $V(\rho) = \frac{\alpha r_0 \rho}{\sqrt{r_0^2 + \rho^2}}$, con $\alpha, r_0 > 0$:

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F} - \partial_{\mathbf{x}_1} V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F} - \partial_{\mathbf{x}_2} V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \end{cases} \tag{1}$$

   Si supponga che all'istante iniziale: $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{x}}_1(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2(0) = (d, 0, 0)$, $\dot{\mathbf{x}}_2(0) = (-v_1, v_2, 0)$, con $d, v_1, v_2 > 0$.

   (a) Si risolva esplicitamente il moto del centro di massa del sistema.

   (b) Si determinino gli integrali primi per il moto della coordinata relativa $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ e se ne calcolino i valori corrispondenti ai dati iniziali assegnati; si identifichi il piano su cui si svolge il moto di $\mathbf{r}$.

   (c) Al variare degli integrali primi (sempre supponendo $d, v_1, v_2 > 0$), si disegni il grafico del potenziale efficace, si disegnino le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ (con $\rho = |\mathbf{r}|$) e si discuta qualitativamente la natura del moto radiale e del moto complessivo.

   (d) Si discuta se è possibile scegliere $d, v_1, v_2 > 0$ in modo tale che il moto di $\mathbf{r}$ sia circolare uniforme.

4. **(6 punti).** Al luna park, Luigi decide di salire sul galeone dei pirati, una giostra che oscilla nel modo seguente: il galeone è sospeso a un braccio meccanico di lunghezza $R$, contenuto nel piano verticale $xz$, che vincola il galeone a muoversi sulla circonferenza verticale di raggio $R$ e centro nel fulcro del braccio. Se $\theta$ è l'angolo formato dal braccio con la verticale, la legge oraria del moto angolare è $\theta(t) = \theta_0 \sin(\kappa t)$, con $0 < \theta_0 < \pi$ e $\kappa > 0$. Dopo aver scelto un sistema di riferimento fisso $\kappa$ e uno in moto $K$ solidale a Luigi mentre si trova sulla giostra (durante la corsa Luigi rimane legato e fermo su un sedile del galeone), si scrivano:

   i. le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità da $\kappa$ a $K$;

   ii. la forza totale, per componenti, a cui è soggetto Luigi (si assuma che Luigi sia soggetto, oltre che alle forze fittizie dovute al moto di $K$ rispetto a $\kappa$, anche alla forza peso). Qual è l'intensità di tale forza al variare del tempo?

5. **(6 punti).** Una lamina omogenea rigida di massa $M = 100$ gr ha la forma di un trapezio rettangolo di base maggiore $a = 5$ cm, base minore $b = 3$ cm e altezza $h = 4$ cm. La lamina è incernierata al vertice $O$ della base maggiore che insiste sull'angolo retto della lamina, in modo da poter ruotare liberamente e senza attrito attorno ad esso.

   (a) Si determini la posizione del centro di massa del sistema.

   (b) Si calcolino: la matrice d'inerzia del corpo rispetto ad $O$ e i corrispondenti momenti principali di inerzia.