Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO X - MARTHA FARAGGIANA, ENZO LIVRIERI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

1. Fissiamo un sistema di riferimento κ posizionando l'origine al centro del cubo e i tre assi x, y, z ortogonali tra di loro e in maniera tale che ognuno di essi sia parallelo ad uno spigolo del cubo; cosí facendo e chiamando P_i , con $i = 1, \ldots, 8$ i punti corrispondenti agli otto vertici del cubo, avremo che essi avranno coordinate:

$$\mathbf{q}_i = (q_1, q_2, q_3) = (\delta_1^{(i)} \frac{\ell}{2}, \delta_2^{(i)} \frac{\ell}{2}, \delta_3^{(i)} \frac{\ell}{2}), \quad \text{con} \quad \delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}, \delta_3^{(i)} = \pm 1$$

Chiamando P_0 il centro di massa e utilizzando la ben nota formula per calcolare le coordinate del centro di massa

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

dove n =numero di punti, $m_i = m$ =massa del punto P_i, q_i = coordinate del punto P_i, si puó facilmente verificare che esso ha coordinate: $\mathbf{Q}_0 = (0, 0, 0)$ e quindi coincide esattamente con l'origine degli assi.

Per un singolo vertice del cubo la matrice d'inerzia é:

$$I_{P_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(q_2^2 + q_3^2) & -mq_1q_2 & -mq_1q_3 \\ -mq_1q_2 & m(q_1^2 + q_3^2) & -mq_2q_3 \\ -mq_1q_3 & -mq_2q_3 & m(q_1^2 + q_2^2) \end{pmatrix}$$

Quindi per il punto P_i di coordinate $(\delta_1 \frac{\ell}{2}, \delta_2 \frac{\ell}{2}, \delta_3 \frac{\ell}{2})$avremo che la relativa matrice d'inerzia sará data da:

$$I_{P_i} = \begin{pmatrix} m\frac{\ell^2}{2} & -m\delta_1^{(i)}\delta_2^{(i)}\frac{\ell^2}{4} & -m\delta_1^{(i)}\delta_3^{(i)}\frac{\ell^2}{4} \\ -m\delta_2^{(i)}\delta_1^{(i)}\frac{\ell^2}{4} & m\frac{\ell^2}{2} & -m\delta_2^{(i)}\delta_3^{(i)}\frac{\ell^2}{4} \\ -m\delta_3^{(i)}\delta_1^{(i)}\frac{\ell^2}{4} & -m\delta_3^{(i)}\delta_2^{(i)}\frac{\ell^2}{4} & m\frac{\ell^2}{2} \end{pmatrix}$$

Sommando su i, e usando il fatto che $\sum_i \delta_j^{(i)} \delta_k^{(i)} = 0$, $\forall j \neq k$, troviamo: $I = \sum_{i=1}^8 I_{P_i} = \begin{pmatrix} 4m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4m\ell^2 \end{pmatrix}$

Quindi i tre momenti d'inerzia saranno:

$$I_1 = I_2 = I_3 = 4m\ell^2$$

e i corrispondenti assi d'inerzia coincidono con i tre assi del sistema di riferimento scelto.

2. Fissiamo inizialmente un sistema di riferimento κ tale che:
   - il piano Oxy contiene una delle facce del tetraedro (che chiameremo base);
   - l'origine coincide con il baricentro del triangolo equilatero della base del tetraedro;

- l'asse y e l'asse z contengono due vertici del tetraedro, entrambi con coordinate positive.

in questo sistema di coordinate avremo che i quattro vertici del tetraedo (che per comoditá chiameremo P_1, P_2, P_3, P_4) hanno coordinate:

$$\mathbf{q}_{P_1} = (-\frac{\ell}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\ell, 0); \quad \mathbf{q}_{P_2} = (\frac{\ell}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\ell, 0); \quad \mathbf{q}_{P_3} = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}\ell, 0) \quad \mathbf{q}_{P_4} = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ell)$$

Il centro di massa ha dunque coordinate:

$$\mathbf{q}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \mathbf{q}_{P_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m \mathbf{q}_{P_i}}{4m} = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\ell)$$

Trasliamo ora rigidamente il sistema κ (i.e., senza ruotare gli assi) in modo che la nuova origine coincida con il centro di massa. In questo nuovo sistema di riferimento i vertici del tetraedro e il centro di massa del sistema hanno coordinate:

$$\mathbf{q}'_{P_1} = (-\frac{\ell}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\ell, -\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\ell); \quad \mathbf{q}'_{P_2} = (\frac{\ell}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\ell, -\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\ell); \quad \mathbf{q}'_{P_3} = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}\ell, -\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\ell)$$

$$\mathbf{q}'_{P_4} = (0, 0, \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\ell); \quad \mathbf{q}'_{cm} = (0, 0, 0)$$

Le matrici d'inerzia relative ai quattro vertici del tetraedro in questo nuovo sistema di coordinate sono:

$$I_{P_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}m\ell^2 & -\frac{\sqrt{3}}{12}m\ell^2 & -\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}m\ell^2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{12}m\ell^2 & \frac{7}{24}m\ell^2 & -\frac{\sqrt{2}}{24}m\ell^2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}m\ell^2 & -\frac{\sqrt{2}}{24}m\ell^2 & \frac{1}{3}m\ell^2 \end{pmatrix};$$

$$I_{P_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}m\ell^2 & \frac{\sqrt{3}}{12}m\ell^2 & \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}m\ell^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{12}m\ell^2 & \frac{7}{24}m\ell^2 & -\frac{\sqrt{2}}{24}m\ell^2 \\ \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}m\ell^2 & -\frac{\sqrt{2}}{24}m\ell^2 & \frac{1}{3}m\ell^2 \end{pmatrix};$$

$$I_{P_3} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24}m\ell^2 & \frac{\sqrt{2}}{12}m\ell^2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{12}m\ell^2 & \frac{1}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}$$

$$I_{P_4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi: $I = \sum_{i=1}^{4} I_{P_i} = \begin{pmatrix} m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & m\ell^2 \end{pmatrix}$; i tre momenti d'inerzia saranno dunque:

$$I_1 = I_2 = I_3 = m\ell^2$$

e i corrispondenti assi d'inerzia coincidono con i tre assi del sistema di riferimento scelto.

3. Fissiamo un sistema di riferimento in modo da posizionare l'origine sul punto medio della sbarra, l'asse z parallelo alla sbarra e gli assi x e y ortogonali tra di loro e all'asse z. In questo sistema di riferimento un punto della sbarra é identificato dal vettore:

$$\mathbf{q} = (0, 0, z), \qquad z \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$$

É facile verificare che il centro di massa ha coordinate $\mathbf{Q}_0 = (0, 0, 0)$ e quindi coincide esattamente con l'origine degli assi.

Per come é definita la matrice d'inerzia I nel caso di corpi rigidi con distribuzione continua di massa si vede che gli unici elementi della matrice diversi da zero sono:

$$a_{11} = a_{22} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} z^2 \mathrm{d}m$$

dove $dm(z) = \lambda dz$, con $\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\ell} = \frac{M}{\ell}$ la densità lineare della sbarretta. Troviamo allora:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{M}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{12} M\ell^2 \ .$$

Quindi: $I = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}M\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}M\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; i tre momenti d'inerzia saranno dunque:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} M\ell^2, \quad I_3 = 0$$

e i corrispondenti assi d'inerzia coincidono con i tre assi del sistema di riferimento scelto.

4. Fissiamo un sistema di riferimento in modo da posizionare l'origine al centro dell'anello, gli assi x e y ortogonali tra di loro e giacenti sullo stesso piano dell'anello e l'asse z ortogonale al piano dove giace l'anello. In questo sistema di riferimento un punto dell'anello é identificato dal vettore:
   $\mathbf{q} = (x, y, 0)$, con x, y tali che $x^2 + y^2 = \ell^2$.

   É facile verificare che il centro di massa ha coordinate $\mathbf{Q}_0 = (0, 0, 0)$ e quindi coincide esattamente con l'origine degli assi.

   Per come é definita la matrice d'inerzia I nel caso di corpi rigidi con distribuzione continua di massa si vede facilmenti che gli elementi $a_{13} = a_{31} = 0$ e $a_{23} = a_{32} = 0$. Ricordando che l'anello é uniforme e quindi ha densitá costante $\lambda = \frac{M}{2\pi\ell}$ e che per definizione $\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\ell}$, per gli altri elementi della matrice avremo:

$$a_{12} = a_{21} = -\int xy\mathrm{d}m = -\frac{M}{2\pi\ell} \int_\gamma xy\mathrm{d}\ell = -\frac{M}{2\pi\ell} \int_0^{2\pi} \ell^3 \cos t \sin t \mathrm{d}t = 0$$

$$a_{11} = \int y^2\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi\ell} \int_\gamma y^2\mathrm{d}\ell = \frac{M}{2\pi\ell} \int_0^{2\pi} \ell^3 \sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{M\ell^2}{2}$$

$$a_{22} = \int x^2\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi\ell} \int_\gamma x^2\mathrm{d}\ell = \frac{M}{2\pi\ell} \int_0^{2\pi} \ell^3 \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{M\ell^2}{2}$$

$$a_{33} = \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi\ell}\int_\gamma (x^2+y^2)\mathrm{d}\ell = \frac{M}{2\pi\ell}\int_0^{2\pi} \ell^3 \mathrm{d}t = M\ell^2$$

dove abbiamo usato $\int_{\gamma(t)} F\mathrm{d}\ell = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))|\dot{\gamma}|$ con $\gamma = (\ell\cos t, \ell\sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi)$.

quindi: $I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}M\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}M\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & M\ell^2 \end{pmatrix}$; quindi i tre momenti d'inerzia saranno:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}M\ell^2, \quad I_3 = M\ell^2$$

e i corrispondenti assi d'inerzia coincidono con i tre assi del sistema di riferimento scelto.

5. Fissiamo un sistema di riferimento in modo da posizionare l'origine al centro del disco, gli assi x e y ortogonali tra di loro e giacenti sullo stesso piano del disco e l'asse z ortogonale al piano dove giace la lamina. In questo sistema di riferimento un punto della lamina a forma circolare di raggio ℓ é identificato dal vettore:

   $\mathbf{q} = (x, y, 0)$, con x, y tali che $x^2 + y^2 \leq \ell^2$.

   É facile verificare che il centro di massa ho coordinate $\mathbf{Q}_0 = (0, 0, 0)$ e quindi coincide esattamente con l'origine degli assi.

   Per come é definita la matrice d'inerzia I nel caso di corpi rigidi con distribuzione continua di massa si vede facilmenti che gli elementi $a_{13} = a_{31} = 0$ e $a_{23} = a_{32} = 0$. Ricordando che la lamina é uniforme e quindi ha densitá superficiale costante $\sigma = \frac{M}{\pi\ell^2}$ e che per definizione $\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\Sigma}$, per gli altri elementi della matrice avremo:

$$a_{12} = a_{21} = -\int xy\mathrm{d}m = -\frac{M}{\pi\ell^2}\int xy\mathrm{d}\Sigma = -\frac{M}{\pi\ell^2}\int\int xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{M}{\pi\ell^2}\int_0^\ell \rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0$$

$$a_{11} = \int y^2\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi\ell^2}\int y^2\mathrm{d}\Sigma = \frac{M}{\pi\ell^2}\int\int y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{M}{\pi\ell^2}\int_0^\ell \rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{M\ell^2}{4}$$

$$a_{22} = \int x^2\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi\ell^2}\int x^2\mathrm{d}\Sigma = \frac{M}{\pi\ell^2}\int\int x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{M}{\pi\ell^2}\int_0^\ell \rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{M\ell^2}{4}$$

$$a_{33} = \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m = \frac{M\ell^2}{2}$$

   dove abbiamo usato il cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

   quindi: $I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}M\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}M\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}M\ell^2 \end{pmatrix}$; i tre momenti d'inerzia saranno dunque:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}M\ell^2, \quad I_3 = \frac{1}{2}M\ell^2$$

e i corrispondenti assi d'inerzia coincidono con i tre assi del sistema di riferimento scelto.

6. Fissiamo un sistema di riferimento in modo da posizionare l'origine al centro del quadrato, gli assi x e y ortogonali tra di loro, giacenti sullo stesso piano della lamina e paralleli a due lati consecutivi del quadrato e l'asse z ortogonale al piano dove giace la lamina. In questo sistema di riferimento un punto della lamina a forma quadrata di lato ℓ é identificato dal vettore:

$$\mathbf{q} = (x, y, 0), \qquad x, y \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$$

É facile verificare che il centro di massa ha coordinate $\mathbf{Q}_0 = (0, 0, 0)$ e quindi coincide esattamente con l'origine degli assi.

Per come é definita la matrice d'inerzia I nel caso di corpi rigidi con distribuzione continua di massa si vede facilmenti che gli elementi $a_{13} = a_{31} = 0$ e $a_{23} = a_{32} = 0$. Ricordando che la lamina é uniforme e quindi ha densitá costante $\sigma = \frac{M}{\ell^2}$ e che per definizione $\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\Sigma}$, per gli altri elementi della matrice avremo:

$$a_{12} = a_{21} = -\int xy\mathrm{d}m = -\frac{M}{\ell^2}\int xy\mathrm{d}\Sigma = -\frac{M}{\ell^2}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x\mathrm{d}x \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} y\mathrm{d}y = 0$$

$$a_{11} = \int y^2\mathrm{d}m = \frac{M}{\ell^2}\int y^2\mathrm{d}\Sigma = \frac{M}{\ell^2}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \mathrm{d}x \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} y^2\mathrm{d}y = \frac{M\ell^2}{12}$$

$$a_{22} = \int x^2\mathrm{d}m = \frac{M}{\ell^2}\int x^2\mathrm{d}\Sigma = \frac{M}{\ell^2}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x^2\mathrm{d}x \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \mathrm{d}y = \frac{M\ell^2}{12}$$

$$a_{33} = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \frac{M\ell^2}{6}$$

quindi: $I = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}M\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}M\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}M\ell^2 \end{pmatrix}$; i tre momenti d'inerzia saranno dunque:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M\ell^2, \quad I_3 = \frac{1}{6}M\ell^2$$

e i corrispondenti assi d'inerzia coincidono con i tre assi del sistema di riferimento scelto.