Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato III - Martha Faraggiana e Enzo Livrieri (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1.

a)

Dobbiamo trovare una funzione $H(x, y)$ tale che $\frac{\mathrm{d}H(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = 0$

Derivando otteniamo: $\frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = 0$.

Un modo per ottenere ció é imporre:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \qquad , \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y}$$

da cui otteniamo:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} = \sqrt{(1+x^2)}y \Rightarrow H(x,y) = \int \sqrt{1+x^2}y\mathrm{d}y + f(x)$$

$\Rightarrow H(x, y) = \frac{\sqrt{1+x^2}y^2}{2} + f(x)$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} = \frac{xy^2}{2\sqrt{(1+x^2)}} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow H(x,y) = \int (\frac{xy^2}{2\sqrt{(1+x^2)}} - \frac{1}{x^2})\mathrm{d}x + f(y)$$

$\Rightarrow H(x, y) = \frac{\sqrt{1+x^2}y^2}{2} + \frac{1}{x} + f(y)$

Quindi imponendo: $f(x) = \frac{1}{x}$ e $f(y) = 0$,abbiamo che:

$$H(x,y) = \frac{\sqrt{1+x^2}y^2}{2} + \frac{1}{x}$$

é una costante del moto per il sistema.

b)

Dal punto a) sappiamo che $H_0 = H(x, y) = \frac{\sqrt{1+x^2}y^2}{2} + \frac{1}{x}$. Restringiamoci a $x > 0$. Risolvendo per y troviamo:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}(H_0 - \frac{1}{x})} = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}(\frac{x-x_0}{xx_0})}$$

con $x \geq x_0 := H_0^{-1}$. Sostituendo $y = y(x)$ nell'equazione per x troviamo (restringendoci per semplicità al caso $y \geq 0$):

$$\dot{x} = \sqrt{2\sqrt{1+x^2}(\frac{x-x_0}{xx_0})}$$

che dà (scegliendo $y(0) = 0$, $x(0) = x_0$ come dati iniziali)

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dt}{\sqrt{2\sqrt{1+x^2}(\frac{x-x_0}{xx_0})}}$$

È facile verificare che l'integrale a membro di destra diverge per $x(t) \to \infty$, che implica che la soluzione con il dato iniziale scelto è globale nel futuro.

<u>Esercizio 2.</u>

a)

Una costante del moto per il sistema é: $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$, con V(x) tale che $f(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$.
Nel nostro caso avremo dunque:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\int f(r)\mathrm{d}r = \frac{\alpha}{2}\int \frac{1}{r^3}\mathrm{d}r = -\frac{\alpha}{4r^2}$$

quindi: $E(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{\alpha}{4r^2}$

b)

Chiamando $E(r, \dot{r}) = E_0$, possiamo riscrivere questa relazione come:

$$\dot{r}^2 = (E_0 + \frac{\alpha}{4r^2}) \Rightarrow \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{4E_0r^2 + \alpha}{2mr^2}}.$$

c)

Sia ora r_1 un punto generico dello spazio e sia $\bar{t}$ il tempo impiegato per andare da r_1 a $r_0 = 0$.
Integrando per separazioni di variabili la relazione precedente otteniamo:

$$\bar{t} = \int_{r_1}^{r_0}\sqrt{\frac{2mr^2}{4r^2E_0 + \alpha}} = \frac{\sqrt{2m}}{4E_0}\int_{r_1}^{r_0}\frac{4E_0r}{\sqrt{4r^2E_0 + \alpha}} = \frac{\sqrt{2m}}{4E_0}(\sqrt{4r^2E_0 + \alpha})\Big\|_{r_1}^{r_0} = \frac{\sqrt{2m}}{4E_0}(\alpha - \sqrt{4r_1^2E_0 + \alpha})$$

Essendo $\dot{r}(0) = v_0 < 0$ e $r \in \mathbb{R}^+$, allora partendo da un qualunque punto dello spazio r_1 avremo che il moto finirá nel centro $r = 0$
Ma essendo $\bar{t} < \infty$ qualunque sia la scelta di r_1 allora avremo che non ci puó essere esistenza globale della soluzione.

<u>Esercizio 3.</u>

a)

Una costante del moto per il sistema é: $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$, con V(x) tale che $f(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$.
Nel nostro caso avremo dunque:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int f(x)\mathrm{d}x = -2xe^{x^2}\mathrm{d}x = -e^{x^2}$$

quindi: $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - e^{x^2}$

b)

I punti di equilibrio del sistema sono i punti x tali che $f(x) = 0$.
Nel nostro caso avremo dunque:
$f(x) = 2xe^{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ é un punto di equilibrio per il sistema.

c)

Sia $\bar{t}$ il tempo impiegato per andare da un punto $(x(0), \dot{x}(0)) = (\varepsilon, 0)$ all'infinito. Integrando per separazioni di variabili la legge di conservazione trovata, esattamente come nell'es 2, otteniamo:

$$\bar{t} = \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E_0 + e^{x^2})}} < \infty$$

essendo quest'ultimo un integrale convergente.

Ma allora abbiamo appena trovato una soluzione che parte vicino al punto di equilibrio $x(0) = 0$ e che in tempo finito si allontana all'infinito; quindi il punto di equilibrio é un punto instabile.

ESERCIZIO 4.

a) Se M è simmetrica allora esiste una base ortonormale $\{\mathbf{v}_i\}$ di autovettori di M. Chiamiamo x'_i le coordinate del vettore $\mathbf{x}$nella base $\{\mathbf{v}_i\}$. Allora la forma quadratica $\mathbf{x} \cdot M\mathbf{x}$ si può riscrivere come: $\mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} = \sum_i \lambda_i |x'_i|^2$, che mostra immediatamente che $\mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} > 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, se e solo se tutti i λ_i sono positivi.

b) Supponiamo che $\mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} > 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Sia λ un autovalore di M e scriviamo $\lambda = a + ib$ (dove eventualmente b può essere zero, nel caso in cui $\lambda \in \mathbb{R}$); sia $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2$ l'autovettore corrispondente, con $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ le parti reale e immaginaria (eventualmente $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, nel caso in cui stiamo considerando un autovettore reale). Si ha:

$$M\mathbf{u_1} = a\mathbf{u}_1 - b\mathbf{u}_2 \ , \qquad M\mathbf{u_2} = a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_1 \ ,$$

da cui

$$\mathbf{u}_1 \cdot M\mathbf{u_1} + \mathbf{u}_2 \cdot M\mathbf{u_2} = a(|\mathbf{u}_1|^2 + |\mathbf{u}_2|^2)$$

D'altra parte il membro di sinistra è > 0 per ipotesi, e quindi $a = \mathrm{Re}\lambda > 0$, $\forall \lambda \in \Sigma(M)$. Questo dimostra l'implicazione diretta, i.e., $M > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\lambda > 0, \forall \lambda \in \Sigma(M)$.

Per dimostrare che l'implicazione inversa è falsa, è sufficiente esibire un controesempio. Si consideri $M = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, con $\varepsilon > 0$. Gli autovalori sono entrambi positivi e uguali a $\varepsilon > 0$. La forma quadratica corrispondente è $\varepsilon(x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2$ che, calcolata in $(x_1, x_2) = (1, -1)$ dà:

$$\mathbf{x} \cdot M\mathbf{x}\big|_{\mathbf{x}=(1,-1)} = 2\varepsilon - 1$$

che ovviamente è negativa non appena $\varepsilon < 1/2$.

ESERCIZIO 5.

Il nostro sistema unidimensionale é descritto dall'equazione: $\ddot{x} = -\frac{1}{x^2} - 8(x - 1)$.

a)

I punti di equilibrio del sistema sono i punti x tali che $f(x) = 0$.

Nel nostro caso avremo dunque:

$f(x) = -\frac{1}{x^2} - 8(x - 1) = 0 \Rightarrow \frac{-1-8x^2(x-1)}{x^2} = 0$

E quindi abbiamo due punti di equilibrio:

$x_1 = \frac{1}{2}$, $\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$;

N.b: abbiamo scartato il punto $x_3 = \frac{\pm 1 - \sqrt{5}}{4}$ perché $x \in (0, \infty)$.

b)

Focalizziamoci ora sui dati iniziali $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ e andiamo a studiare il potenziale in quest'intervallo.

Trattiamo subito il caso $x_0 = \frac{1}{2}$. Essendo un punto di massimo per il potenziale avremo che esso é un punto di equilibrio (nella fattispecie instabile); allora abbiamo esistenza della soluzione per tutti i tempi.

Per gli altri punti dell'intervallo notiamo subito che il punto $\frac{1+\sqrt{5}}{4} \in (\frac{1}{2}, 1]$. Quest'ultimo é un punto di minimo per il potenziale e quindi é un punto di equilibrio stabile per il sistema; ma noi sappiamo che un punto di equilibrio é stabile se partendo da dati iniziali vicini al punto stabile rimango vicino allo stesso per tutti i tempi (cosa che chiaramente implicherebbe, per questi dati iniziali, esistenza globale della soluzione).

Cerchiamo di capire se i dati iniziali da noi considerati sono abbastanza vicini: notiamo che $U(1) \leq U(\frac{1}{2})$ e quindi per continuitá $\forall x_0 \in (\frac{1}{2}, 1], \quad U(x_0) \leq U(\frac{1}{2})$.
Questo basta per assicurare che per ogni dato iniziale $\forall x_0 \in (\frac{1}{2}, 1]$ la soluzione non si allontana dal punto di equilibrio stabile, il che come giá detto prima ci garantisce esistenza globale per tutti i tempi.
c)
Posto $\dot{x} = y$ abbiamo il sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{x^2} - 8(x-1) \end{cases}$$

Sia $A(x,y)$ la matrice del sistema linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio (x,y). Si ha

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{x^3} - 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora per $(x,y) = (\frac{1}{2}, 0)$ si ha

$$A(\frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda = \pm 2\sqrt{2}$ e dunque $(x,y) = (\frac{1}{4}, 0)$ é un punto di equilibrio instabile.
Per $(x,y) = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}, 0)$ si ha invece

$$A(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-8\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{8\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}}$ e dunque, essendo $Re\lambda = 0$, non si puó concludere nulla sulla natura del punto di equilibrio.

<u>Esercizio 6.</u>
a)

b)

$f(r,t) = 0 \iff \beta(1 - \frac{r}{R})e^{\lambda t} = 0 \iff r = R$.
c)
Risolviamo l'equazione per saparazione di variabili. Troviamo

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{R}{R-s} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \beta e^{\lambda s} \mathrm{d}s$$

Il secondo membro si integra facilmente:

$$\int_{t_0}^{t} \beta e^{\lambda s} \mathrm{d}s = \frac{\beta}{\lambda} e^{\lambda(t-t_0)}$$

Nel primo integrale distinguiamo 2 casi, $r_0 < R$ e $r_0 > R$:
nel primo caso avremo:

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{R}{R-s} \mathrm{d}s = R \log(\frac{R-r_0}{R-r(t)}) \Rightarrow r(t) = (r_0 - R)e^{-\frac{\beta}{R\lambda} e^{(\lambda t - t_0)}} + R$$

nel secondo caso avremo:

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{R}{R-s}\mathrm{d}s = -\int_{r_0}^{r(t)} \frac{-R}{R-s}\mathrm{d}s = \int_{r(t)}^{r_0} \frac{R}{s-R}\mathrm{d}s = R\log(\frac{r_0 - R}{r(t)-R}) \Rightarrow r(t) = (r_0 - R)e^{-\frac{\beta}{R\lambda}(e^{\lambda t - t_0})} + R$$

e quindi in entrambi i casi avremo:

$$r(t) = (r_0 - R)e^{-\frac{\beta}{R\lambda}(e^{\lambda t - t_0})} + R$$

d)
Essendo $r(t)$ definita $\forall t$, la soluzione é definita globalmente per tutti i dati iniziali.
e)
Per determinare la natura del punto di equilibrio studiamo l'andamento della soluzione per $t \to \infty$ sia nel caso $r_0 < R$ che nel caso $r_0 > R$.
Si verifica che in entrambi i casi si ha

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} (r_0 - R)e^{-\frac{\beta}{R\lambda}(e^{\lambda t - t_0})} + R = R$$

quindi il punto é attrattivo e asintoticamente stabile.