Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO VI - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

a) Il sistema planare assegnato è Hamiltoniano se esiste $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Integrando i membri, uguagliando e completando i quadrati (la costante del moto é sempre la stessa a meno di costanti) si ottiene $H(x, y) = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2$.

b) I punti di equilibrio sono i valori (x, y) che annullano entrambe le componenti del campo vettoriale che definisce il sistema. La prima equazione é annullata da $y = \{0, 1, -1\}$ mentre la seconda da $x = \{0, 1, -1\}$ quindi in totale abbiamo 9 punti di equilibrio $P_0 = (0, 0)$ $P_1 = (0, 1)$ $P_2 = (0, -1)$ $P_3 = (1, 0)$ $P_4 = (-1, 0)$ $P_5 = (1, 1)$ $P_6 = (-1, 1)$ $P_7 = (-1, -1)$ $P_8 = (1, -1)$.

c) Le orbite sono simmetriche rispetto all'asse delle x e all'inversione rispetto all'origine quindi all'asse delle y infatti $H(x, y) = H(-x, -y) = H(x, -y) = H(-x, y)$.

d) Per discutere la stabilitá dei punti di equilibrio studiamo il sistema linearizzato intorno a ciascun punto. Si ha come al solito $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 + 12y^2 \\ 4 - 12x^2 & 0 \end{pmatrix}$. Allora $A(P_1) = A(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$ e A ha un autovalore $\lambda = 4\sqrt{2} > 0$ quindi P_1 e P_2 sono punti instabili. Analogamente $A(P_3) = A(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso autovalore e quindi anche P_3 e P_4 sono instabili.
Lo studio del sistema linearizzato non dà informazioni sulla natura degli altri punti come é facile verificare dal momento che risulta $\Re\lambda = 0$ per ogni autovalore. Per studiare la stabilitá dei punti $P_{5,6,7,8}$ possiamo prendere $H(x, y)$ come funzione di Ljapunov. Infatti abbiamo che

$$\begin{cases} H(P_{5,6,7,8}) = 0 \\ H(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \neq P_{5,6,7,8} \\ \dot{H}(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \end{cases}$$

quindi per il teorema di Ljapunov tali punti sono tutti stabili.
Per quanto riguarda il punto P_0 possiamo procedere nello stesso modo prendendo peró $W(x, y) = 2 - H(x, y)$ (si noti infatti che P_0 è massimo locale di $H(x, y)$).

e) I valori critici dell'energia sono $H(\pm 1, 0) = H(0, \pm 1) = 1$, $H(0, 0) = 2$ e $H(\pm 1, \pm 1) = 0$.

f) Il valore dell'energia sulle separatrici é 1 quindi nel primo quadrante ($x > 0$; $y > 0$)

$$\begin{aligned} H(x,y) = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 &= 1 \\ (y^2-1)^2 = 1-(x^2-1)^2 &= -x^4+2x^2 \\ \Rightarrow (y^2-1) &= \pm x\sqrt{2-x^2} \\ \Rightarrow y &= \sqrt{1 \pm x\sqrt{2-x^2}} \end{aligned}$$

g) Su $\mathcal{S}_+$ si ha $y = \sqrt{1+x\sqrt{2-x^2}}$ quindi nel primo quadrante abbiamo:

$$\dot{x} = -4y(1-y^2) = -4\sqrt{1+x\sqrt{2-x^2}}(-x\sqrt{2-x^2}) > 0$$

mentre su $\mathcal{S}_-$ si ha $y = \sqrt{1-x\sqrt{2-x^2}}$ quindi

$$\dot{x} = -4y(1-y^2) = -4\sqrt{1-x\sqrt{2-x^2}}(x\sqrt{2-x^2}) < 0$$

i) Studio delle curve di livello per $E \in (0,1)$

- Le curve di livello si possono esprimere come unione di curve di equazioni:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1+\sqrt{-x^4+2x^2-1+E}} = \sqrt{1+\sqrt{-(x^2-1-\sqrt{E})(x^2-1+\sqrt{E})}} \\ y &= \sqrt{1-\sqrt{-x^4+2x^2-1+E}} = \sqrt{1-\sqrt{-(x^2-1-\sqrt{E})(x^2-1+\sqrt{E})}} \\ y &= -\sqrt{1+\sqrt{-x^4+2x^2-1+E}} = -\sqrt{1+\sqrt{-(x^2-1-\sqrt{E})(x^2-1+\sqrt{E})}} \\ y &= -\sqrt{1-\sqrt{-x^4+2x^2-1+E}} = -\sqrt{1-\sqrt{-(x^2-1-\sqrt{E})(x^2-1+\sqrt{E})}} \end{aligned}$$

  Le equazioni sono definite per $x \in (-\sqrt{1+\sqrt{E}}, -\sqrt{1-\sqrt{E}}) \cup (\sqrt{1-\sqrt{E}}, \sqrt{1+\sqrt{E}})$. Nel primo e nel secondo quadrante le curve di livello sono rappresentate dalle prime due equazioni (e rispettivi domini). Nel terzo e quarto dalle ultime due. È evidente che le orbite sono disgiunte dal momento che $x \neq 0$ e $y \neq 0$ $\forall x$ in particolare cioé sono separate dagli assi cartesiani.
- Per un teorema (20.36 del libro di Gentile) sappiamo che se esiste una regione aperta U racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello chiusa di H (in questo caso dalle separatrici) che contiene un unico punto di equilibrio stabile (in questo caso $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$) allora ogni orbita è periodica e si svolge intorno al punto di equilibrio.
- Vedi punto precedente
- Segue dalla dipendenza continua dai dati iniziali e dal primo punto.

j) Studio delle curve di livello per $E \in (1,2)$

- La prima e la terza equazione descrivono le curve che contengono le separatrici mentre la seconda e la quarta sono le due curve contenute dalle separatrici interne. Attenzione che adesso le curve sono definite per $x \in (-\sqrt{1+\sqrt{E}}, \sqrt{1+\sqrt{E}})$
- Sono chiuse (basta vedere le equazione e il disegno). È evidente che sono periodiche perché non contengono punti di equilibrio.

- Abbiamo detto che la seconda e quarta equazione rappresentano tale curva che é definita per $x \in (-\sqrt{1+\sqrt{E}}, \sqrt{1+\sqrt{E}})$ in una regione che che contiene un solo punto di equilibrio $(0,0)$ quindi ragioniamo come nel punto i)
- Segue dalla dipendenza dai dati iniziali e dai punti precedenti

Il grafico completo delle traiettorie nello spazio delle fasi con i loro versi di percorrenza è riportato in Figura 1.

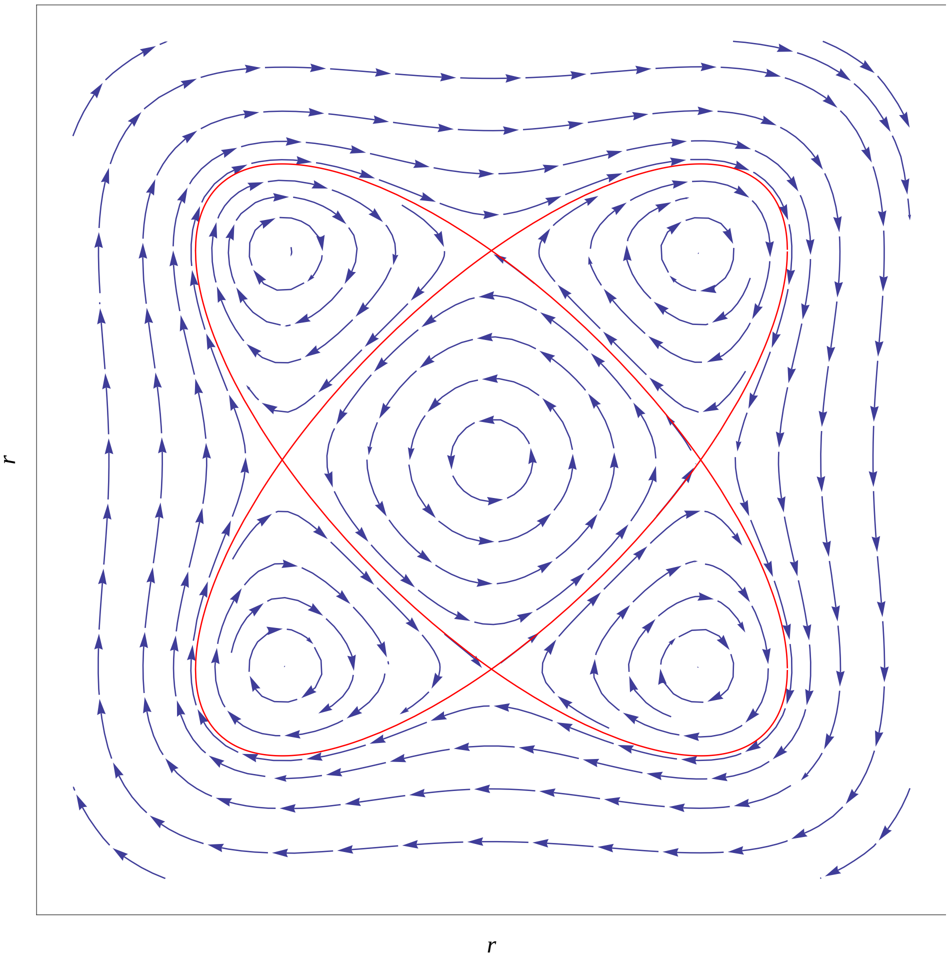

Figura 1: Il grafico delle curve di livello (Problema 1).

<u>Esercizio 2.</u> Abbiamo il sistema meccanico $m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ quindi

$$V(x) = -\frac{1}{x} - x$$

Sappiamo che l'energia meccanica è una costante del moto per i sistemi meccanici.
Infatti posto $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ abbiamo che

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + \frac{dV}{dx}) = 0$$

dato che $m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$.
Posto $\dot{x} = \frac{y}{m}$ troviamo che il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{y}{m} \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{x^2} + 1 \end{cases}$$

Notiamo che i punti di equilibrio sono del tipo $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico per il potenziale. L'unico punto critico del potenziale è dunque $P_0 = (1; 0)$ che sarà quindi anche l'unico punto di equilibrio del sistema (N.B.: il punto $P_1 = (-1, 0)$ non é stato inserito nella trattazione in quanto $x \in \mathbb{R}^+$). Per quanto riguarda l'energia potenziale abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} V(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} V(x) = -\infty$$

$$V'(x) > 0 \iff 0 < x < 1$$

Quindi P_0 é un punto di massimo; il grafico di V è rappresentato in Figura 2.

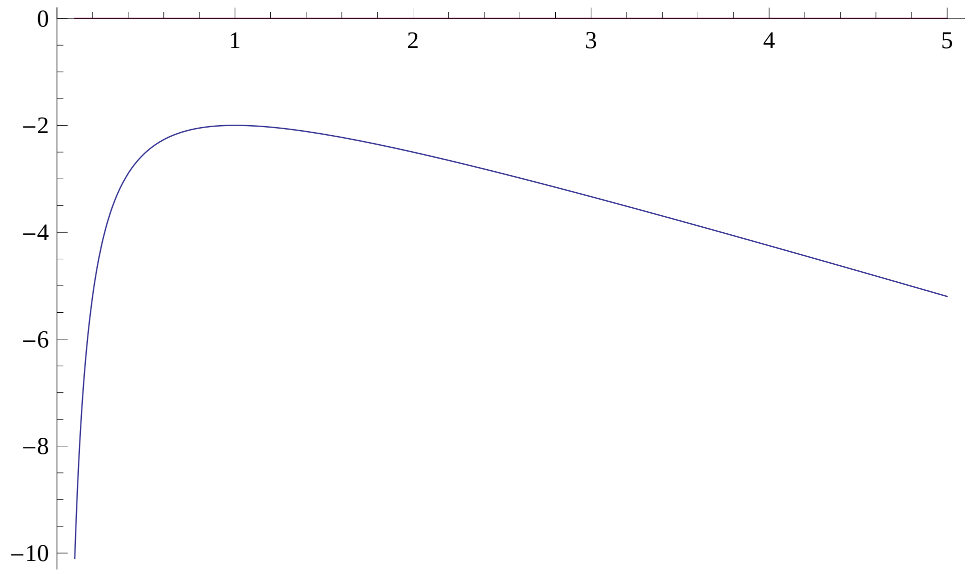

Figura 2: Il grafico dell'energia potenziale (Problema 2).

Da $E = m\ddot{x}^2/2 + V(x)$ troviamo le curve $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$, che sono simmetriche rispetto all'asse x e definite solo per x tali che $V(x) \leq E$.

Adesso studiamo le curve di livello, al variare dell'energia meccanica:

1. per $-\infty < E < V(1) = -2$ avremo che le curve di livello sono costituite da due componenti che rappresentano orbite aperte, una a destra e una a sinistra del punto di equilibrio;

2. per $E = V(1) = -2$ avremo che le curve di livello sono costituite da cinque componenti che rappresentano quattro orbite aperte e un orbita periodica chiusa costituita dal punto di equilibrio;

3. per $E > V(1) = -2$ avremo che le curve di livello sono costituite da due componenti che rappresentano due orbite aperte, una sopra e una sotto l'asse delle x;

Il grafico completo delle curve di livello con i loro versi di percorrenza è riportato in Figura 3.

Studiamo infine il moto sulle separatrici. Come caso illustrativo consideriamo quello in cui il dato iniziale si trovi leggermente alla destra del punto di equilibrio ed energia $E = -2$ (gli altri moti sulle separatrici si studiano analogamente). La soluzione all'equazione del moto, scritta in forma implicita è:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{1+\varepsilon}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{-2 + \frac{1}{x} + x}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{1+\varepsilon}^{x(t)} \frac{\sqrt{x}\, dx}{x - 1}$$

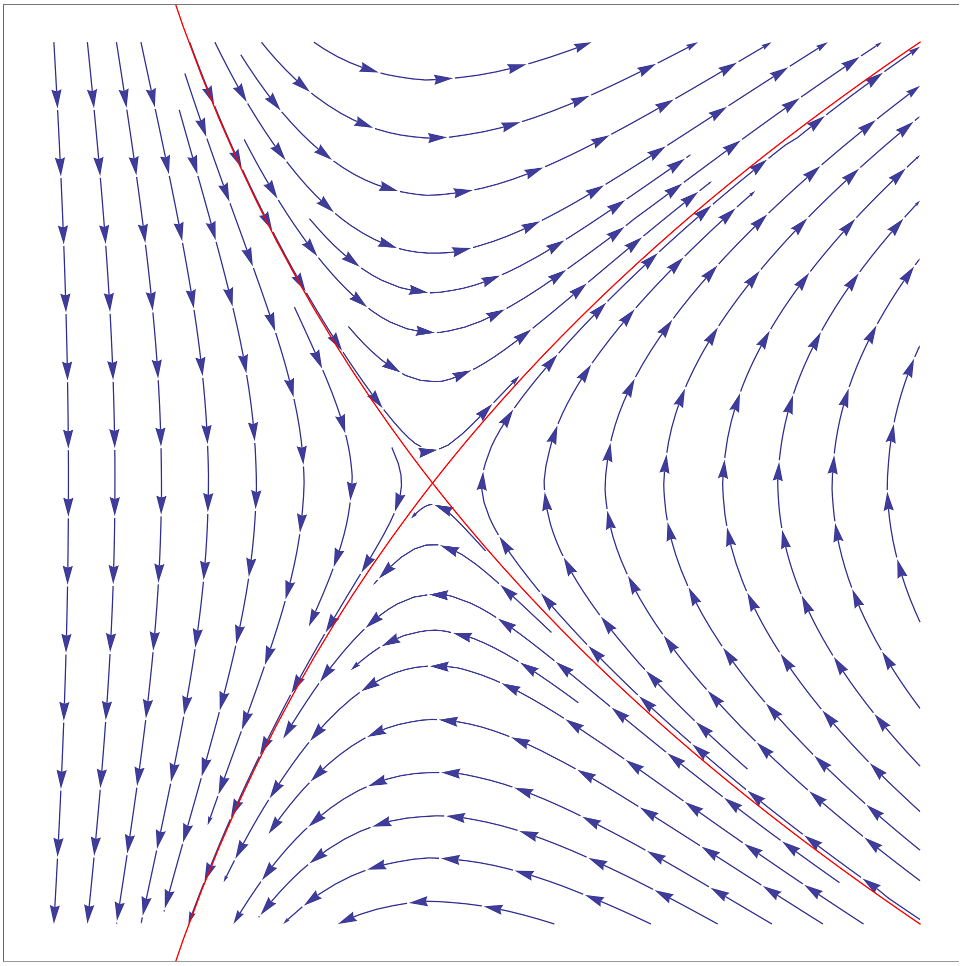

Figura 3: Il grafico delle curve di livello (Problema 2).

Cambiando variabile in $y = \sqrt{x}$ troviamo:

$$\frac{t}{\sqrt{2m}} = \int_{(1+\varepsilon)^2}^{x^2(t)} \frac{y^2}{y^2-1} dy = \int_{(1+\varepsilon)^2}^{x^2(t)} \Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\Big)\Big] dy = \Big(y + \frac{1}{2}\log\frac{y-1}{y+1}\Big)\Big|_{(1+\varepsilon)^2}^{x^2(t)}$$

e quindi la soluzione sulla separatrice si ottiene per inversione da:

$$x^2(t) + \frac{1}{2}\log\frac{x^2(t)-1}{x^2(t)+1} = \frac{t}{\sqrt{2m}} - (1+\varepsilon)^2 - \log\frac{(1+\varepsilon)^2-1}{(1+\varepsilon)^2+1}\,.$$

<u>Esercizio 3.</u> Abbiamo il sistema meccanico $m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{12}{x^{13}} - \frac{6}{x^7}$ quindi

$$V(x) = \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}$$

Sappiamo che l'energia meccanica é una costante del moto per i sistemi meccanici. Infatti posto $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ abbiamo che

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(m\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}) = 0$$

dato che $m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$.
Posto $\dot{x} = \frac{y}{m}$ troviamo che il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{y}{m} \\ \dot{y} = \dfrac{12}{x^{13}} - \dfrac{6}{x^7} \end{cases}$$

Notiamo che i punti di equilibrio sono del tipo $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico per il potenziale. L'unico punto critico del potenziale é $x_0 = \sqrt[6]{2}$ quindi l'unico punto di equilibrio del sistema sará $(\sqrt[6]{2}, 0)$. Per quanto riguarda l'energia potenziale abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} V(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} V(x) = 0 \qquad V'(x) > 0 \iff x > \sqrt[6]{2}$$

da ció segue che $x_0 = \sqrt[6]{2}$ é un punto di minimo del potenziale e dunque per il teorema di Dirichelet sappiamo che $P_0 = (\sqrt[6]{2}, 0)$ é un punto stabile per il nostro sistema dinamico.
Il grafico di V é rappresentato in Figura 4.

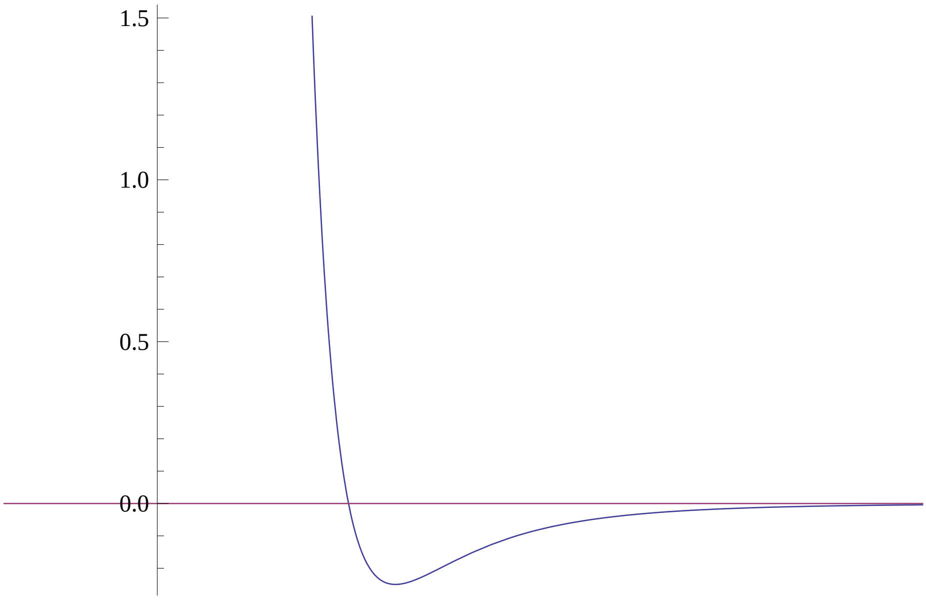

Figura 4: Il grafico dell'energia potenziale (Problema 3).

Adesso studiamo le curve di livello, al variare dell'energia meccanica:

1. per $E < V(\sqrt[6]{2}) = -\frac{1}{4}$ non abbiamo moto;
2. per $E = V(\sqrt[6]{2})$ avremo una sola traiettoria che rimane ferma nel punto P_0 per tutti i tempi;
3. per $V(\sqrt[6]{2}) < E < 0$ avremo una traiettoria periodica che gira attorno al punto di equilibrio P_0
4. per $E \geq 0$ avremo che le curve di livello sono costituite da una sola orbita aperta che gira anch'essa attorno al punto di equilibrio P_0;

I versi di percorrenza nei sistemi meccanici sono sempre da sinistra a destra nel semipiano superiore ($\dot{x} > 0$) e da destra a sinistra in quello inferiore ($\dot{x} < 0$).

Il grafico completo delle curve di livello con i loro versi di percorrenza è riportato in Figura 5.

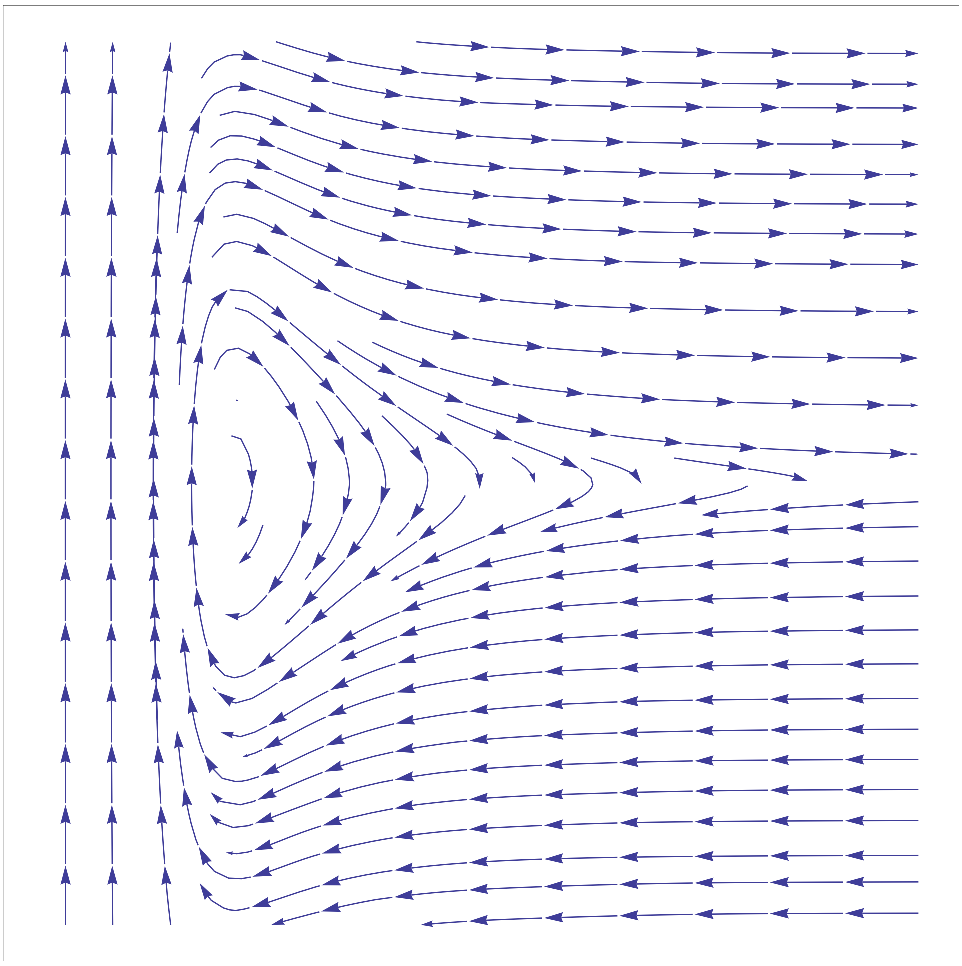

Figura 5: Il grafico delle curve di livello (Problema 3).