Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012
FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato VII - Martha Faraggiana e Enzo Livrieri (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Problema 1 del secondo esonero A.A. 2011-2012 (vedi le soluzioni sul sito). Nel testo, nei punti (d) e seguenti si ponga $\sqrt{\frac{\alpha m}{2}}$ al posto di $\sqrt{\frac{m}{2}}$.

Esercizio 2. Abbiamo un sistema costituito da due punti materiali di massa m_1 e m_2 che interagiscono attraverso una forza centrale, ovvero una forza che:

1. soddisfi il terzo principio della dinamica;
2. dipenda solo dal modulo della differenza dei vettori posizione dei due punti;
3. sia diretta lungo la retta congiungente i due punti;

Le equazioni del moto sono dunque descritte da un sitema del tipo:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = \dfrac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \dfrac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \end{cases}$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$m_1 = m_2 = m; \qquad F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = -2\alpha|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|(1 - 3|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4)$$

Sappiamo da teoria (Lemma **30.4** Gentile) che, sotto queste ipotesi, se introduciamo il cambio di variabili:

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \dfrac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

dove R prende il nome di coordinata del centro di massa e r di coordinata relativa, abbiamo che, nelle nuove variabili, le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}} = 0 \\ \ddot{\mathbf{r}} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}F(|\mathbf{r}|) \end{cases}$$

dove μ prende il nome di massa ridotta ed è tale che: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

La prima equazione è l'equazione del moto del centro di massa che risulta essere rettilineo uniforme. Concentriamoci dunque sulla secoda.
Sappiamo che una forza centrale è sempre conservativa, quindi esiste una funzione

$$V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

tale che

$$F(r) = -V'(r)$$

Nel nostro caso essendo

$$F(r) = -2\alpha r(1-3r^4) \quad \Rightarrow \quad V(r) = \int 2\alpha r - 6\alpha r^5 = \alpha r^2 - \alpha r^6$$

L'equazione della coordinata relativa tuttavia è ancora un sistema dinamico tridimensionale (dipendendo di fatto dalle tre coordinate del vettore $r = (r_1, r_2, r_3)$);

da teoria però sappiamo che se il momento angolare $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ il moto si svolge su un piano ortogonale ad $\mathbf{L}$, e quindi scegliendo un sistema di coordinate in cui l'asse z è diretto lungo la direzione del vettore momento angolare, senza perdita di generalità, possiamo scrivere il vettore $\mathbf{r}$ come $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$ riducendo di fatto il sistema a un equazione a due gradi di libertà.

Possiamo ora introdurre un nuovo cambiamento di variabili

$$\begin{cases} r_1 = \rho\cos\theta \\ r_2 = \rho\sin\theta \end{cases}$$

e nelle variabili polari (ρ, θ) il sistema si riscrive:

$$\begin{cases} \mu\ddot{\rho} = -\dfrac{\mathrm{d}V_{eff}(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \\ \dot{\theta} = \dfrac{L}{\mu\rho^2} \end{cases}$$

Per la conservazione del momento angolare la seconda equazione è facilmente risolvibile se la dipendenza di $\rho(t)$ da t è nota;

bisogna dunque concentrarci sulla prima equazione,che si può interpretare come l'equazione di un punto materiale di massa μ che si muove lungo semiretta $\mathbb{R}^+$ (ci siamo quindi ridotti a dover studiare un moto unidimensionale) con energia potenziale $V_{eff}(\rho)$, data dalla somma dell'energia potenziale originaria $V(\rho)$ piú l'energia potenziale $\frac{L^2}{2\mu\rho^2}$ (la forza corrispondente a quest'ultima prende il nome di energia centrifuga).

Nel nostro caso dunque dobbiamo studiare l'equazione:

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{\mathrm{d}V_{eff}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}$$

dove $V_{eff}(\rho) = \alpha\rho^2 - \alpha\rho^6 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$, al variare di $\alpha, \mu > 0$ e $L \geq 0$.

Gli integrali del moto sono l'energia totale del sistema e il momento angolare L.

CASO 1) $L = 0$:

Sappiamo che in questo caso il moto avviene su una retta e quindi ci andiamo a studiare il potenziale:
$V_{eff}(\rho) = \alpha\rho^2 - \alpha\rho^6$ con $\rho \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\rho\to-\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty \qquad \lim_{\rho\to+\infty} V(x) = -\infty$$

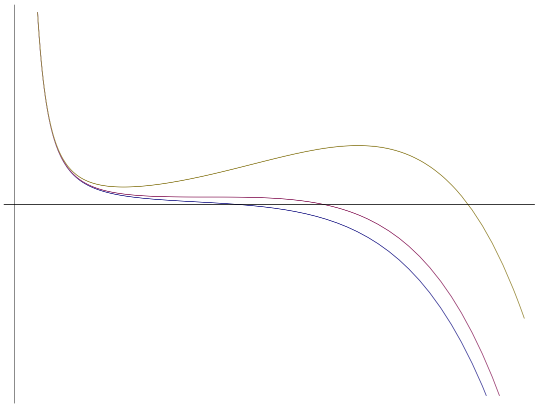

Figura 1: Potenziale efficace $V_{eff}(r)$, $r > 0$, al variare di $L > 0$ per $L < \frac{1}{6}\mu\alpha$ (blu), $L = \frac{1}{6}\mu\alpha$ (viola) e $L > \frac{1}{6}\mu\alpha$ (giallo).

$$V'_{eff}(\rho) > 0 \iff \rho < -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \;\vee\; 0 < \rho < \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

Quindi:

$\rho_0 = 0$ é un punto di minimo per il potenziale e dunque un punto stabile per il sistema;

$\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ e $\rho_2 = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ sono due punti di massimo per il potenziale e dunque due punti instabili per il sistema.

Si noti che si hanno traiettorie periodiche in corrispondenza dei tre punti di equilibrio e per valori dell'energia $V_{eff}(0) < E < V_{eff}(\sqrt[4]{\frac{1}{3}})$; le conponenti sono chiaramente quelle che girano attorno al punto di equilibrio stabile.

CASO 2) $L > 0$:

$V_{eff}(\rho) = \alpha\rho^2 - \alpha\rho^6 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$
Andiamoci a studiare il potenziale efficace

$$\lim_{\rho\to 0^+} V_{eff}(\rho) = \infty \qquad \lim_{\rho\to +\infty} V(x) = -\infty$$

Per quel che riguarda i valori critici del potenziale avremo che:

$$V'_{eff}(\rho) = 2\alpha\rho - 6\alpha\rho^5 - \frac{L^2}{\mu\rho^3} = \frac{2\mu\alpha\rho^4 - 6\mu\alpha\rho^8 - L^2}{\mu\rho^3}$$

Con la sostituzione $t = \rho^4$ otteniamo che:

$$V'_{eff} = 0 \iff -6\mu\alpha t^2 + 2\mu\alpha t - L^2 = 0$$

che ha come radici:

$$t_{1,2} = \frac{\mu\alpha \pm \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}$$

Quindi il potenziale avrá $0, 1, 2$ punti critici a seconda che $\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2$ sia maggiore, minore o uguale a 0.

caso 2a) $\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2 > 0 \Rightarrow L^2 < \frac{\mu\alpha}{6}$:

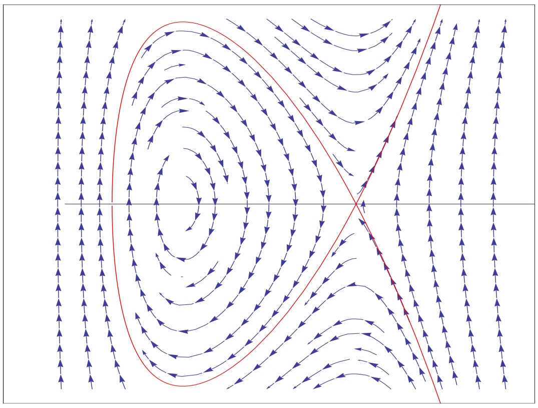

Figura 2: Orbite nel caso 2a).

la derivata si annullerá in quattro punti:
$\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{\mu\alpha+\sqrt{\mu^2\alpha^2-6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}}$
$\rho_2 = -\sqrt[4]{\frac{\mu\alpha+\sqrt{\mu^2\alpha^2-6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}}$
$\rho_3 = \sqrt[4]{\frac{\mu\alpha-\sqrt{\mu^2\alpha^2-6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}}$
$\rho_4 = -\sqrt[4]{\frac{\mu\alpha-\sqrt{\mu^2\alpha^2-6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}}$

chiaramente ρ_2 e ρ_4 devono essere scartati in quanto < 0, mentre ρ_1 é ben definito. Per quel che riguarda ρ_3 dobbiamo invece verificare che la quantitá sotto radice quarta sia positiva:

$$\frac{\mu\alpha - \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}$$

ma essendo:

$$\sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2} < \mu\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha} < \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\mu\alpha - \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha} > 0$$

Come si puó vedere facilmente dallo studio del segno della derivata prima ρ_3 e ρ_1 sono rispettivamente un minimo e un massimo per il potenziale (e quindi rispettivamente un punto stabile e un punto instabile per il sistema).

caso 2b) $\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2 = 0 \Rightarrow L^2 = \frac{\mu\alpha}{6}$:

la derivata si annulla in un solo punto $\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$.
Per studiare la natura del punto critico andiamoci a calcolare la derivata seconda del potenziale:

$$V''_{eff}(\rho) = 2\alpha - 30\alpha\rho^4 - \frac{3L^2}{\mu\rho^4};$$

e quindi:

$$V''_{eff}(\sqrt[4]{\frac{1}{6}}) = 2\alpha - \frac{30\alpha}{6} - \frac{18L^2}{\mu} = 0$$

(Ricordiamo che siamo nell'ipotesi $L^2 = \frac{\mu\alpha}{6}$)

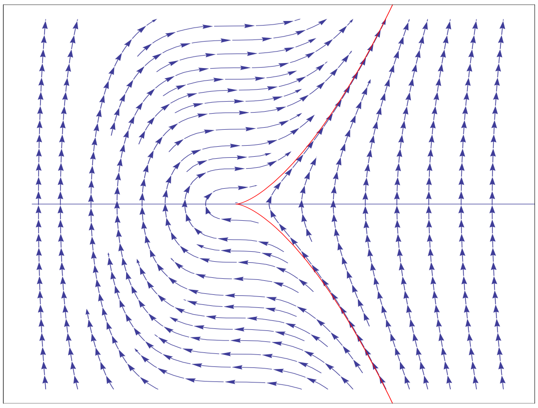

Figura 3: Orbite nel caso 2b).

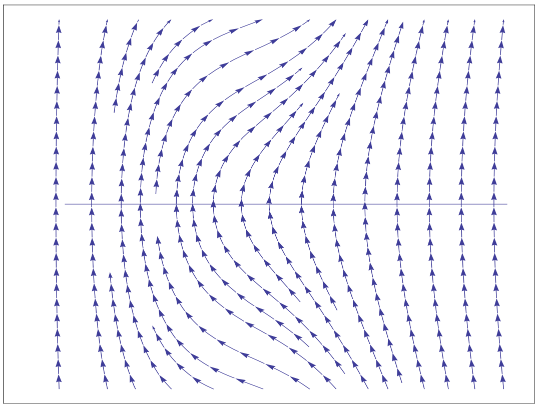

Figura 4: Orbite nel caso 2c).

Quindi il punto ρ_1 é un punto di flesso per il potenziale e dunque un punto instabile per il sistema.

caso 2c) $\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2 > 0 \Rightarrow L^2 > \frac{\mu\alpha}{6}$:

la derivata del potenziale non si annulla in nessun punto.

Per tutti i casi studiati precedentemente il moto complessivo nella variabile relativa è periodico in corrispondenza dei punti di equilibrio per la variabile radiale, oppure quando il moto per la variabile radiale è periodico e la variazione della variabile angolare è commensurabile con 2π, cioé se esiste $q \in Q$ tale che $\int_0^T \frac{L}{\rho^2(t)} \mathrm{d}t = 2\pi q$, dove T indica il periodo della variabile radiale.

<u>Esercizio 3.</u>

1. Il moto dell'oscillatore armonico bidimensionale è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 \end{cases}$$

La matrice A é composta dagli elementi

$$\begin{cases} A_{11} = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{k}{2}x_1^2 \\ A_{22} = \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{k}{2}x_2^2 \\ A_{12} = A_{21} = \frac{m}{2}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{k}{2}x_1x_2 \end{cases}$$

ed è banale verificare che tali elementi sono integrali primi del moto infatti risulta:

$$\begin{cases} \dot{A}_{11} = m\dot{x}_1\ddot{x}_1 + kx_1\dot{x}_1 = \dot{x}_1(-kx_1 + kx_1) = 0 \\ \dot{A}_{22} = m\dot{x}_2\ddot{x}_2 + kx_2\dot{x}_2 = 0 \\ \dot{A}_{12} = \dot{A}_{21} = \frac{m}{2}(\ddot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_1\ddot{x}_2) + \frac{k}{2}(\dot{x}_1x_2 + x_1\dot{x}_2) = \dot{x}_1(\frac{m}{2}\ddot{x}_2 + \frac{k}{2}x_2) + \dot{x}_2(\frac{m}{2}\ddot{x}_1 + \frac{k}{2}x_1) = 0 \end{cases}$$

2. Si ha

$$\mathrm{Tr}A = A_{11} + A_{22} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 + \frac{k}{2}|\mathbf{x}|^2 = E$$

mentre

$$\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = \frac{mk}{4}(\dot{x}_1^2x_2^2 + x_1^2\dot{x}_2^2 - 2x_1x_2\dot{x}_1\dot{x}_2) = \frac{mk}{4}(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2)^2 = \frac{k}{4m}L^2$$

dove $L = m|x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2|$ è il modulo del momento angolare.

3. Verifichiamo l'uguaglianza

$$\frac{(\rho')^2}{\rho^6} + \Big(\frac{1}{\rho^2} - \frac{mE}{L^2}\Big)^2 = \frac{m^2}{L^4}\Big[4A_{12}^2 + (A_{11} - A_{22})^2\Big]$$

Si ha

$$4A_{12}^2 + (A_{11} - A_{22})^2 = 4(\frac{m}{2}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{k}{2}x_1x_2)^2 + (\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) + \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2))^2$$

Svolgendo le parentesi e completando gli opportuni prodotti notevoli otteniamo

$$\begin{aligned} 4A_{12}^2 + (A_{11} - A_{22})^2 &= \big(\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2)\big)^2 - mk(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2)^2 = \\ &= (\frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 + \frac{k}{2}|\mathbf{x}|^2)^2 - \frac{k}{m}L^2 = E^2 - \frac{k}{m}L^2 \end{aligned}$$

Allora $\frac{m^2}{L^4}(4A_{12}^2 + (A_{11} - A_{22})^2) = \frac{m^2}{L^4}E^2 - \frac{mk}{L^2}$.

Consideriamo ora la combinazione

$$\frac{(\rho')^2}{\rho^6} + \Big(\frac{1}{\rho^2} - \frac{mE}{L^2}\Big)^2 \tag{1}$$

dove $\rho' = \rho'(\theta) = \frac{d\rho}{d\theta}(\theta)$. Ricordiamo che tale derivata é data da

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm\frac{m\rho^2}{L}\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}$$

In questo caso abbiamo $V_{eff}(\rho) = \frac{k}{2}\rho^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2}$ quindi sostituendo i termini nell'equazione (1) otteniamo:

$$\frac{2m}{L^2\rho^2}(E - \frac{k}{2}\rho^2 - \frac{L^2}{2m\rho^2}) + \frac{1}{\rho^4} + \frac{m^2E^2}{L^4} - 2\frac{mE}{\rho^2L^2} = \frac{m^2E^2}{L^4} - \frac{mk}{L^2}$$

quindi i due termini coincidono.

4. L'equazione di un'ellisse centrata nell'origine in coordinate polari ha la forma:

$$\rho^2\Big[\frac{\sin^2(\theta-\theta_0)}{a^2}+\frac{\cos^2(\theta-\theta_0)}{b^2}\Big]=1 \quad \Rightarrow \quad \rho=\frac{1}{\sqrt{a^{-2}\sin^2(\theta-\theta_0)+b^{-2}\cos^2(\theta-\theta_0)}}$$

dove a è il semiasse maggiore e b quello minore. Derivando rispetto a θ troviamo

$$\begin{aligned}\rho'(\theta) &= -\frac{1}{\big[a^{-2}\sin^2(\theta-\theta_0)+b^{-2}\cos^2(\theta-\theta_0)\big]^{3/2}}\sin(\theta-\theta_0)\cos(\theta-\theta_0)\big(a^{-2}-b^{-2}\big)\\ &= \rho^3\sin(\theta-\theta_0)\cos(\theta-\theta_0)\big(b^{-2}-a^{-2}\big)\end{aligned}$$

Quadrando ambo i membri troviamo

$$\frac{(\rho')^2}{\rho^6}=\sin^2(\theta-\theta_0)\cos^2(\theta-\theta_0)\big(b^{-2}-a^{-2}\big)^2$$

dove usando ancora l'equazione per $\rho=\rho(\theta)$:

$$\sin^2(\theta-\theta_0)=\Big(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}\Big)(b^{-2}-a^{-2})^{-1}\ , \qquad \cos^2(\theta-\theta_0)=\Big(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{a^2}\Big)(b^{-2}-a^{-2})^{-1}$$

Sostituendo queste relazioni nell'equazione precedente troviamo

$$\frac{(\rho')^2}{\rho^6}=\Big(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}\Big)\Big(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{a^2}\Big)=-\Big(\frac{1}{\rho^2}-\frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}\Big)^2+\frac{(b^{-2}-a^{-2})^2}{4}$$

che ha la forma desiderata. Piú precisamente, quest'equazione si riduce all'equazione trovata sopra

$$\frac{(\rho')^2}{\rho^6}+\Big(\frac{1}{\rho^2}-\frac{mE}{L^2}\Big)^2=\frac{m^2E^2}{L^4}-\frac{mk}{L^2}$$

se poniamo:

$$\frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}=\frac{mE}{L^2}\ , \qquad \frac{(b^{-2}-a^{-2})^2}{4}=\frac{m^2E^2}{L^4}-\frac{mk}{L^2}\ .$$

Risolvendo rispetto a a e b troviamo l'espressione dei due semiassi nella forma:

$$b^{-2}=\frac{mE}{L^2}+\sqrt{\frac{m^2E^2}{L^4}-\frac{mk}{L^2}}\ , \qquad a^{-2}=\frac{mE}{L^2}-\sqrt{\frac{m^2E^2}{L^4}-\frac{mk}{L^2}}$$

che coincide con quella ricavata per altra via nel Capitolo 7.31 delle dispense del prof. Gentile