Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato IX - Martha Faraggiana e Enzo Livrieri (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1.

1. Scegliamo il sistema di coordinate K con l'origine O' coincidente con la posizione dell'uomo ad ogni tempo $t \geq 0$. Scegliamo inoltre la terna fissa con origine O al centro della piattaforma e in modo che la posizione dell'uomo abbia al tempo $t = 0$ coordinate $(R; 0; 0)$ (assi x e y sul piano della piattaforma, asse z ortogonale al piano, asse x passante per la posizione dell'uomo al tempo $t = 0$). Fissiamo la terna mobile K in modo che gli assi siano paralleli a quelli della terna fissa al tempo $t = 0$. Se chiamiamo $\mathbf{Q}$ le coordinate in K e q le coordinate in k, sappiamo che le leggi di trasformazione sono:

$$\mathbf{q}(t) = B(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t)$$

Nel nostro caso abbiamo che:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\beta(t) & -\sin\beta(t) & 0 \\ \sin\beta(t) & \cos\beta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} (R - V_0 t)\cos\beta(t) \\ (R - V_0 t)\sin\beta(t) \\ 0 \end{pmatrix} = B\mathbf{R}(t) ,$$

dove $\beta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ e

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} R - V_0 t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv (R - V_0 t)\hat{\eta}_1 .$$

Le coordinate dell'uomo in K sono semplicemente $\mathbf{Q}_{uomo}(t) = \mathbf{0}$, quindi le coordinate dell'uomo in κ sono $\mathbf{q}_{uomo}(t) = \mathbf{r}(t)$.

2. $\mathbf{q}_{uomo}(t) = ((R - V_0 t)\cos\beta(t), (R - V_0 t)\sin\beta(t), 0)$ é l'equazione in forma parametrica della traiettoria descritta dall'uomo in κ. Essa é del tipo: $(R(t)\cos\beta(t), R(t)\sin\beta(t), 0)$; dato che $\dot{R}(t) < 0$ l'equazione trovata descrive un moto a spirale che parte dal bordo del disco per arrivare sino al centro. L'uomo raggiungerá l'origine O al tempo $\bar{t}$ tale che $\mathbf{q}_{uomo}(\bar{t}) = \mathbf{0} \Rightarrow R(\bar{t}) = 0$, ovvero al tempo

$$\bar{t} = \frac{R}{V_0}$$

3. La legge di trasformazione delle velocitá per un vettore $\mathbf{Q}$ qualsiasi (non necessariamente quello che descrive la posizione dell'uomo) è:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = B[\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}] + \dot{\mathbf{r}}$$

dove $\mathbf{\Omega} = \beta(t)\hat{\eta}_3$. In particolare $\dot{\mathbf{q}}_{uomo} = \dot{\mathbf{r}}$. Ricordandoci che $\mathbf{r} = B\mathbf{R}(t)$ con $\mathbf{R}(t) = (R - V_0 t)\hat{\eta}_1$:

$$\dot{\mathbf{q}}_{uomo}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = B\Big[(R - V_0 t)\mathbf{\Omega} \wedge \hat{\eta}_1 - V_0\hat{\eta}_1\Big] = B\Big[(R - V_0 t)\beta(t)\hat{\eta}_2 - V_0\hat{\eta}_1\Big] \qquad (1)$$

4. Le forze attive che agiscono sull'uomo sono la forza di gravità e le forze di reazione vincolare della piattaforma della giostra, che sono tali da compensare esattamente la forza di gravità e la risultante delle forze fittizie: si ricordi infatti che in K il moto dell'uomo è banale ($\mathbf{Q}_{uomo} \equiv \mathbf{0}$) e in particolare la risultante delle forze esterne + fittizie in K è $\mathbf{0}$. Dato che $\mathbf{Q}_{uomo} = \dot{\mathbf{Q}}_{uomo} = \mathbf{0}$, l'unica forza fittizia che agisce sull'uomo è quella inerziale di traslazione $-m\mathbf{A}_0$, dove $\mathbf{A_0} = B^{-1}\ddot{\mathbf{r}}$ è l'accelerazione dell'origine del sistema di riferimento mobile letto nel sistema di riferimento K. Ricordandoci della (1) troviamo:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= B\Big[\mathbf{\Omega} \wedge \big[(R - V_0t)\beta(t)\hat{\eta}_2 - V_0\hat{\eta}_1\big] + \frac{d}{dt}\big[(R - V_0t)\beta(t)\hat{\eta}_2 - V_0\hat{\eta}_1\big]\Big] = \\ &= B\Big[- (R - V_0t)\beta^2(t)\hat{\eta}_1 - V_0\beta(t)\hat{\eta}_2 - V_0\beta(t)\hat{\eta}_2 + (R - V_0t)\dot{\beta}(t)\hat{\eta}_2\Big] =: B\mathbf{A}_0(t)\end{aligned}$$

e quindi

$$\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} m\beta^2(R - V_0t) \\ 2mV_0\beta - m\dot{\beta}(R - V_0t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\beta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ e $\dot{\beta} = \omega_0 + \alpha t$.

<u>Esercizio 2.</u> Scegliamo il sistema mobile $K = (O'; \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ in modo tale che: $O' = O$; a $t = 0$, la terna di vettori ortogonali $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ coincide con la terna fissa $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$; per ogni $t \geq 0$ il piano π di oscillazione coincide con il piano $\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3$. La rotazione del sistema K avviene attorno all'asse $\hat{e}_3 = \hat{\eta}_3$ ed è quindi data dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) & -\sin\alpha(t) & 0 \\ \sin\alpha(t) & \cos\alpha(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha(t) = \omega t$ dato che la rotazione è costante con velocità angolare ω.
Visto che il punto materiale è vincolato a oscillare a distanza ℓ da O' nel piano $\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3$ abbiamo che il vettore che individua il punto finale del pendolo nel sistema di riferimento K è

$$\mathbf{Q}(t) = (0, \ell\sin\theta(t), -\ell\cos\theta(t)) =: \ell\hat{u}_r$$

dove $\theta(t)$ è l'angolo tra il pendolo e l'asse di rotazione e $\hat{u}_r$ è il versore orientato come il filo (con verso dal punto di sospensione alla massa m).
Le forze che agiscono sul punto sono la forza di gravità, le reazioni vincolari $\mathbf{R}$ e $\mathbf{T}$ e le forze fittizie centrifuga e di Coriolis:

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{R} - 2m\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - m\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) \tag{2}$$

dove $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ e $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \omega)$. Per definizione, $\mathbf{T}$ è parallelo al filo del pendolo, ossia $\mathbf{T} = -T\hat{u}_r$, mentre $\mathbf{R}$ è ortogonale al piano $\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3$, ossia $\mathbf{R} = R\hat{\eta}_1$. Si noti anche che $\dot{\mathbf{Q}} = l\dot{\theta}\hat{u}_\theta$, con $\hat{u}_\theta = (0, \cos\theta, \sin\theta)$ è il versore tangente alla traiettoria della massa m. Quindi:

$$-2m\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} = 2m\omega\dot{\theta}\ell\cos\theta\hat{\eta}_1 \ , \qquad -m\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) = m\omega^2\ell\sin\theta\hat{\eta}_2 \ .$$

Ora, moltiplicando scalarmente la (1) per $\hat{\eta}_1$ troviamo l'equazione per la reazione vincolare $\mathbf{R}$: $0 = R + 2m\omega\dot{\theta}\ell\cos\theta$. Moltiplicando scalarmente la (1) per $\hat{u}_r$ troviamo l'equazione per la reazione vincolare $\mathbf{T}$: $m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta + m\omega^2\ell\sin^2\theta$, dove abbiamo usato anche il fatto che $\ddot{\mathbf{Q}} = \ell(\ddot{\theta}\hat{u}_\theta - \dot{\theta}^2\hat{u}_r)$. Infine, moltiplicando scalarmente la (1) per $\hat{u}_\theta$ troviamo l'equazione per la variabile θ:

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2\ell\sin\theta\cos\theta \ ,$$

che è l'equazione di Newton che descrive il moto del pendolo in termini della variabile θ.

Dunque abbiamo il sistema meccanico $\ddot{\theta} = -V'(\theta) = -\frac{g}{\ell}\sin\theta + \omega^2 \sin\theta\cos\theta$, quindi

$$V(\theta) = \frac{g}{\ell}(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}\omega^2 \sin\theta^2$$

Posto $\dot{\theta} = y$ troviamo che il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta + \omega^2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

Notiamo che i punti di equilibrio sono del tipo $(\bar{\theta}, 0)$ con $\bar{\theta}$ punto critico per il potenziale.

La forma del potenziale e le proprietà del moto dipendono dal valore dei parametro ω. Distinguiamo tre casi.

1. $\omega^2 \leq \frac{g}{\ell}$. In questo caso il potenziale ammette solo due punti critici: $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, il primo un minimo isolato e il secondo un massimo proprio ($V''(\pi) = -\frac{g}{\ell} - \omega^2 < 0$). Quindi il punto di equilibrio $(0,0)$ è stabile (per Dirichlet) mentre il punto $(\pi, 0)$ è instabile (per il criterio del linearizzato). Le curve di livello sono qualitativamente le stesse del pendolo semplice.

2. $\omega^2 > \frac{g}{\ell}$. In questo caso il potenziale ammette quattro punti critici: due sono gli stessi di prima, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, mentre i due nuovi punti critici sono $\theta = \pm\arccos(\frac{g}{\ell\omega^2})$. Si vede facilmente che $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ sono due masimi locali propri del potenziale ($V''(0) = \frac{g}{\ell} - \omega^2 < 0$ e $V''(\pi) = -\frac{g}{\ell} - \omega^2 < 0$), quindi sia $(0,0)$ che $(\pi, 0)$ sono instabili per il criterio del linearizzato. Inoltre $\theta = \pm\arccos(\frac{g}{\ell\omega^2})$ sono due minimi locali propri del potenziali, e quindi $(\pm\arccos(\frac{g}{\ell\omega^2}), 0)$ sono stabili per il teorema di Dirichlet. Il sistema ammette tre tipi di moti periodici: quelli ad energia $V(\arccos(\frac{g}{\ell\omega^2})) < E < V(0)$, che sono moti oscillatori attorno o a $\theta^* := \arccos(\frac{g}{\ell\omega^2})$, o a $-\theta^*$; quelli ad energia $V(0) < E < V(\pi)$, che sono moti oscillatori attorno a $\theta = 0$; e quelli ad energia $E > V(\pi)$, che sono moti periodici "aperti. Il sistema inoltre ammette due tipi di moti aperiodici: quelli sulla separatrice ad energia $E = V(0)$ e quelli sulla separatrice a energia $E = V(\pi)$.

<u>Esercizio 3.</u> Fissiamo un sistema di riferimento fisso κ e uno mobile K come indicato nel testo.

1. Una legge di trasformazione delle coordinate é una trasformazione rigida che si esprime come composizione di una rotazione e di una traslazione. In formule indicando come al solito con $\mathbf{q}(t)$ e $\mathbf{Q}(t)$ le coordinate relative rispetto ai due sistemi, avremo che la trasformazione è data da:
$$\mathbf{q}(t) = B(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t)$$
dove
$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è la matrice che descrive una rotazione attorno all'asse $\hat{e}_3 = \hat{\eta}_3$ di un angolo $\theta(t)$, dove nel nostro caso $\theta(t)$ è l'angolo tra $\hat{e}_1$ e $\hat{\eta}_1$. Inoltre $\mathbf{r}(t) = \beta x_2(t)$ è il raggio vettore tra O e $O' \equiv P_2$. Il vettore velocità angolare è dato da $\omega = (0, 0, \dot{\theta}(t)) = \dot{\theta}(t)\hat{e}_3 = \mathbf{\Omega}$, parallelo all'asse di rotazione.

2. Come osservato nel testo, nel sistema di riferimento K il punto P_1 ha, per costruzione, coordinate $\mathbf{X}_1(t) = (\rho(t), 0, 0) = \rho(t)\hat{\eta}_1$. L'equazione del moto di P_1 è quindi
$$m_1\ddot{\rho}\hat{\eta}_{\mathbf{1}} = m_1\ddot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{F}_{est} + \mathbf{F}_{fitt} = \mathbf{F}_{est} + (-m_1\dot{\mathbf{\Omega}}\wedge\mathbf{X}_1 - 2m_1\mathbf{\Omega}\wedge\dot{\mathbf{X}}_1 - m_1\mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{X}_1) - m_1\ddot{\mathbf{r}})$$

dove $\mathbf{F}_{est} = -\hat{\eta}_1 V'(\rho)$ e $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{x}}_2$. Ricordando poi che $m_2\ddot{\mathbf{x}}_\mathbf{2} = -m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \hat{\eta}_1 V'(\rho)$ troviamo:

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{\rho}\hat{\eta}_1 &= -\hat{\eta}_1 V'(\rho) - m_1\ddot{\theta}\rho\hat{\eta}_3 \wedge \hat{\eta}_1 - 2m_1\dot{\theta}\dot{\rho}\hat{\eta}_3 \wedge \hat{\eta}_1 - m_1\rho\dot{\theta}^2\hat{\eta}_3 \wedge (\hat{\eta}_3 \wedge \hat{\eta}_1)) - \frac{m_1}{m_2}V'(\rho)\hat{\eta}_1 = \\
&= -\frac{m_1+m_2}{m_2}V'(\rho)\hat{\eta}_1 - m_1(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho})\hat{\eta}_2 + m_1\rho\dot{\theta}^2\hat{\eta}_1
\end{aligned}$$

3. Proiettiamo l'equazione del moto lungo le componenti $\hat{\eta}_1$ e $\hat{\eta}_2$.
   Lungo $\hat{\eta}_2$ abbiamo
   $$0 = \ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho}\ .$$
   Moltiplicando per ρ ottengo
   $$\rho^2\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\rho\dot{\rho} = \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = \frac{1}{\mu}\frac{dL}{dt} = 0\ ,$$
   che equivale alla conservazione del modulo del momento angolare. Invece proiettando lungo $\hat{\eta}_\mathbf{1}$ si ha
   $$m_1\ddot{\rho} = -\frac{m_1+m_2}{m_2}V'(\rho) + m_1\rho\dot{\theta}^2$$
   e dividendo tutto per m_1 ottengo
   $$\ddot{\rho} = -\frac{1}{\mu}V'(\rho) + \rho\dot{\theta}^2$$
   cioé ricordando che $L = \mu\rho^2\dot{\theta}$
   $$\mu\ddot{\rho} = -V'(\rho) + \frac{L^2}{\mu\rho^3} = -V'(\rho) - \frac{\partial}{\partial\rho}(\frac{L^2}{2\mu\rho^2})\ ,$$
   che è l'equazione desiderata. Si noti che l'ultimo termine è dovuto alla forza centrifuga.