**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012**

# FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO I - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

<u>ESERCIZIO 1.</u> Per prima cosa calcoliamo lo spettro di $A$ il cui polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10),$$

e dunque abbiamo $\Sigma(A) = \{1, 2, 5\}$. Calcoliamo gli autospazi.
$E(1) = Ker(A - \mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ -x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

e quindi $E(1) = \big\{t, -t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\big\}$.
$E(2) = Ker(A - 2\mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

dunque $E(2) = \big\{(-2t, -3t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\big\}$. Analogamente otteniamo
$E(5) = \big\{(t, 3t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\big\}$. Pertanto una base di autovettori sarà data da

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 1) \\ v_2 &= (-2, -3, 1) \\ v_3 &= (1, 3, 1) \end{aligned}$$

Abbiamo perciò

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema nelle nuove coordinate diventa

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = 2y_2 \\ \dot{y}_3 = 5y_3 \end{cases}$$

Il nuovo dato iniziale diventa

$$y(0) = Qx(0) = (y_{01}, y_{02}, y_{03}) = (\frac{x_0}{2} - \frac{y_0}{4} + \frac{z_0}{4}, -\frac{x_0}{3} + \frac{z_0}{3}, -\frac{x_0}{6} + \frac{y_0}{4} + \frac{5z_0}{12})$$

la cui soluzione è $(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = (y_{01}e^t, y_{02}e^{2t}, y_{03}e^{5t})$. La soluzione del sistema iniziale sarà quindi data da

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{01}e^t \\ y_{02}e^{2t} \\ y_{03}e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01}e^t - 2y_{02}e^{2t} + y_{03}e^5t \\ -y_{01}e^t - 3y_{02}e^{2t} + 3y_{03}e^5t \\ y_{01}e^t + y_{02}e^{2t} + y_{03}e^5t \end{pmatrix}$$

<u>ESERCIZIO 2.</u> Notiamo che il sistema è già in forma triangolare, dunque possiamo risolverlo partendo dall'ultima equazione. Abbiamo

$$\dot{x}_3 = x_3, \qquad \Rightarrow, x_3(t) = e^t x_3(0) = e^t$$

Quindi la seconda equazione diventa $\dot{x}_2 = x_2 + e^t$ la cui soluzione è data da

$$x_2(t) = e^t \left( x_2(0) + \int_0^t e^{-s} e^s \mathrm{d}s \right) = e^t(1+t)$$

Sostituendo ancora nella prima troviamo $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$ e quindi

$$x_1(t) = e^t \left( \int_0^t e^{-s} e^s (1+s) \mathrm{d}s \right) = e^t(t + \frac{t^2}{2})$$

Dunque $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (e^t(t + \frac{t^2}{2}), e^t(1+t), e^t)$.

<u>Esercizio 3.</u> Per la discussione sulla natura qualitativa del moto cfr. Capitolo 2 Par. 6 del testo di Gentile.
Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = (-1-\lambda)(5-\lambda) - 2(1+\alpha) = \lambda^2 - 4\lambda - 7 - 2\alpha = 0$$

Quindi

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{11 + 2\alpha}$$

Se $\alpha = -\frac{11}{2}$ allora gli autovalori sono reali e coincidenti $\lambda_{1,2} = 2$.
Se $\alpha > -\frac{11}{2}$ gli autovalori sono reali e distinti $\lambda_1 = 2 + \sqrt{11+2\alpha}$ e $\lambda_2 = 2 - \sqrt{11+2\alpha}$.
Se $\alpha < -\frac{11}{2}$ gli autvalori sono complessi coniugati $\lambda_1 = 2 + i\sqrt{|11+2\alpha|}$ e $\lambda_2 = 2 - i\sqrt{|11-2\alpha|}$
.
Calcoliamo adesso gli autovettori relativi e gli integrali generali distinguendo i tre casi.
$\alpha = -\frac{11}{2}$ ; $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{-9}{2} & 5 \end{pmatrix}$
L'operatore A non é diagonalizzabile quindi cerchiamo di scriverlo in forma canonica di Jordan effettuando un opportuno cambio di base. Cerco soluzioni $(x, y)$ non nulle del sistema
$(A - \lambda \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -\frac{9}{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Una soluzione é $v_1 = (1, \frac{3}{2})$.
Il vettore $v_2$ sará soluzione dell'equazione $(A - \lambda \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -\frac{9}{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
Per esempio $v_2 = (1, 2)$. Quindi $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
Verifichiamo che $QAQ^{-1} = B$ dove $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ cioé ín forma canonica di Jordan. Il sistema nelle nuove coordinate diventa

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_2 \end{cases}, \qquad y(0) = Qx(0) = \begin{pmatrix} 4x_{01} - 2x_{02} \\ -3x_{01} + 2x_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}$$

e perciò

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} y_{01} + t e^{2t} y_{02} \\ e^{2t} y_{02} \end{pmatrix}$$

Allora avremo che la soluzione nelle coordinate di partenza sarà

$$x(t) = Q^{-1} y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} y_{01} + t e^{2t} y_{02} + e^{2t} y_{02} \\ \frac{3}{2} e^{2t} y_{01} + \frac{3}{2} t e^{2t} y_{02} + 2 e^{2t} y_{02} \end{pmatrix}$$

Poi se il dato iniziale é $x(0) = (-1, 2)$ allora $y(0) = (0, 5)$

nel caso $\alpha > -\frac{11}{2}$ gli autovalori sono reali e distinti quindi A é diagonalizzabile. Gli autovettori relativi sono solizione di $(A - \lambda_{1,2})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ .

Otteniamo $v_1 = (1, \frac{3+\sqrt{11+2\alpha}}{2})$ e $v_2 = (1, \frac{3-\sqrt{11+2\alpha}}{2})$ e quindi $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3+\sqrt{11+2\alpha}}{2} & \frac{3-\sqrt{11+2\alpha}}{2} \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{11+2\alpha}}{2\sqrt{11+2\alpha}} & \frac{1}{\sqrt{11+2\alpha}} \\ \frac{3+\sqrt{11+2\alpha}}{2\sqrt{11+2\alpha}} & -\frac{1}{\sqrt{11+2\alpha}} \end{pmatrix}$ Si verifica che $QAQ^{-1} = D$ con D diagonale.

Nelle nuove coordinate il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases}, \qquad y(0) = Qx(0) = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}$$

La soluzione é

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_{01} \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_{02} \end{cases}$$

Quindi la soluzione nelle coordinate di partenza é:

$$x(t) = Q^{-1} y(t)$$

cioé

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_{01} + e^{\lambda_2 t} y_{02} \\ x_2(t) = \dfrac{3+\sqrt{11+2\alpha}}{2} e^{\lambda_1 t} y_{01} + \dfrac{3-\sqrt{11+2\alpha}}{2} e^{\lambda_2 t} y_{02} \end{cases}$$

Se $x(0) = (-1, 2)$ allora $y(0) = (\frac{7-\sqrt{11+2\alpha}}{2\sqrt{11+2\alpha}}, \frac{-7-\sqrt{11+2\alpha}}{2\sqrt{11+2\alpha}})$

Nel caso $\alpha < -\frac{11}{2}$ si hanno due autovalori complessi coniugati. Chiamiamo $\beta := \sqrt{|11+2\alpha|}$ in modo tale che $\lambda_{1,2} = 2 \pm i\beta$. Anche i relativi autovettori sono complessi coniugati $v_1 = (1, \frac{3}{2} + i\frac{\beta}{2})$ e $v_2 = \bar{v_1}$. Peró se scriviamo $v_1 = v + iu$ con $v = (1, \frac{3}{2})$ e $u = (0, \frac{\beta}{2})$ allora sappiamo che con un opportuno cambio di base possiamo riscrivere l'operatore A nella forma $\begin{pmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$.

Infatti posto $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$ e data $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{\beta} & \frac{2}{\beta} \end{pmatrix}$ otteniamo $QAQ^{-1} = B$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$

Nelle nuove coordinate il sistema diventa:

$$\dot{y} = By \qquad y(0) = Qx(0)$$

dove

$$\begin{cases} y_{01} = x_{01} \\ y_{02} = -\dfrac{3}{\beta} x_{01} + \dfrac{2}{\beta} x_{02} \end{cases}$$

Tale sistema ha soluzione

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{2t}(y_{01}\cos\beta t - y_{02}\sin\beta t) \\ y_2(t) = e^{2t}(y_{01}\sin\beta t + y_{02}\cos\beta t) \end{cases}$$

Quindi nelle vecchie coordinate la soluzione sará $x(t) = Q^{-1}y(t)$

cioé

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t}(y_{01}\cos\beta t - y_{02}\sin\beta t) \\ x_2(t) = \dfrac{3}{2}(e^{2t}(y_{01}\cos\beta t - y_{02}\sin\beta t) + \dfrac{\beta}{2}(e^{2t}(y_{01}\sin\beta t + y_{02}\cos\beta t) \end{cases}$$

Se consideriamo come dato iniziale $x(0) = (-1, 2)$ allora si ha $y(0) = (-1, \frac{7}{\beta})$
<u>Esercizio 4.</u> L'equazione può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine ponendo $I = x$ e $y = \dot{x}$. Troviamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -10y - x + \omega_0 \cos \omega_0 t \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b(t)$$

dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \cos \omega_0 t \end{pmatrix}$.
Il polinomio caratteristico di $A$ è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda + 1$$

e quindi abbiamo due autovalori reali e distinti $\lambda_1 = -5 - 2\sqrt{6}$ e $\lambda_2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Calcoliamo gli autospazi. $E(\lambda_1) = \ker(A - \lambda_1 \mathbb{1})$ è dato da

$$(+5 + 2\sqrt{6})x + y = 0, \qquad y = (-5 - 2\sqrt{6})x$$

quindi $E(-1) = \{(t, (-5 - 2\sqrt{6})t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$.
$E(\lambda_2) = \ker(A - \lambda_2 \mathbb{1})$ è dato da

$$(5 - 2\sqrt{6})x + y = 0, \qquad y = (-5 + 2\sqrt{6})x$$

cioè $E(\lambda_2) = \{(t, (-5 + 2\sqrt{6})t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$. Una base di autovettori sarà data da

$$v_1 = (1, -5 - 2\sqrt{6})$$
$$v_2 = (1, -5 + 2\sqrt{6})$$

Poniamo

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 - 2\sqrt{6} & -5 + 2\sqrt{6} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{-5+2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} & \frac{-1}{4\sqrt{6}} \\ \frac{5+2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

e quindi $D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -5 - 2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & -5 + 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$. Sia inoltre $B(t) = Qb(t) = \begin{pmatrix} \frac{-\omega_0 \cos \omega_0 t}{4\sqrt{6}} \\ \frac{\omega_0 \cos \omega_0 t}{4\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, allora il sistema nelle nuove coordinate $(z, w)$ diventa

$$\begin{cases} \dot{z} = (-5 - 2\sqrt{6})z - \dfrac{\omega_0 \cos \omega_0 t}{4\sqrt{6}} \\ \dot{w} = (-5 + 2\sqrt{6})w + \dfrac{\omega_0 \cos \omega_0 t}{4\sqrt{6}} \end{cases} \qquad (z(0), w(0)) = Q(x(0), y(0))$$

la cui soluzione è data da

$$z(t) = e^{-5-2\sqrt{6}} \left( z(0) + \int_0^t e^{(5+2\sqrt{6})s} (-\frac{\omega_0 \cos \omega_0 s}{4\sqrt{6}}) \mathrm{d}s \right)$$
$$w(t) = e^{-5+2\sqrt{6}} \left( (w(0) + \int_0^t e^{(5-2\sqrt{6})s} \frac{\omega_0 \cos \omega_0 s}{4\sqrt{6}} \mathrm{d}s \right) = \frac{16}{15} e^{2t} - \frac{2}{15} \sin t - \frac{1}{15} \cos t$$

Quindi

$$z(t) = e^{-5-2\sqrt{6}} (z(0) + \frac{\omega_0}{4\sqrt{6}(49 + 20\sqrt{6} + \omega_0^2)} (5 + 2\sqrt{6} - e^{(5+2\sqrt{6})t} ((5 + 2\sqrt{6}) \cos \omega_0 t + \omega_0 \sin \omega_0 t)$$
$$w(t) = e^{-5+2\sqrt{6}} (w(0) + \frac{\omega_0}{4\sqrt{6}(-49 + 20\sqrt{6} - \omega_0^2)} (5 - 2\sqrt{6} + e^{(5-2\sqrt{6})t} ((-5 + 2\sqrt{6}) \cos \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega_0 t)$$

Allora la soluzione nelle coordinate di partenza è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

e la soluzione dell'equazione è data dalla prima componente.
<u>ESERCIZIO 5.</u> Il polinomio caratteristico dell'operatore $A$ è

$$P(\lambda) = (-3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$$

e quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = 2+i \qquad \lambda_3 = 2-i$$

uno reale, e due complessi coniugati.
Cerchiamo una base di autovettori. L'autospazio relativo a $\lambda_1$ è dato da

$$\begin{cases} 6y - 2z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases}$$

e quindi abbiamo una soluzione $v_1 = (1, 0, 0)$. $E(2+i) = \ker(A - \lambda_2 \mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} (-5-i)x + 7y + \sqrt{2}z = 0 \\ (1-i)y - 2z = 0 \end{cases}$$

si ottiene la soluzione $v_2 = (\frac{35+2\sqrt{2}-i(\frac{3\sqrt{2}}{2}+7)}{26}, 1, \frac{1-i}{2}))$. Chiamo $\alpha := \frac{35+2\sqrt{2}-i(\frac{3\sqrt{2}}{2}+7)}{26}$.
Analogamente otteniamo che un autovettore relativo a $\lambda_3 = 2-i$ è $v_3 = (\bar{\alpha}, 1, \frac{1+i}{2}) = \bar{v_2}$.
Siano $w$ le coordinate nella base degli autovettori, si ha

$$w = Q^{-1}x, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \bar{\alpha} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-(\alpha+\bar{\alpha})+i(\alpha+\bar{\alpha})}{2} & i(\bar{\alpha}-\alpha) \\ 0 & \frac{1-i}{2} & i \\ 0 & \frac{1+i}{2} & -i \end{pmatrix}$$

Si verifica che

$$B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema nelle nuove coordinate $w$ diventa

$$\dot{w} = Bw, \qquad w_0 = Qx(0) = \begin{pmatrix} x_0 + (\frac{-(\alpha+\bar{\alpha})+i(\alpha+\bar{\alpha})}{2})y_0 + i(\bar{\alpha}+\alpha)z_0 \\ (\frac{1-i}{2})y_0 + iz \\ \frac{1+i}{2}y_0 - iz_0 \end{pmatrix}$$

che ha soluzione

$$\begin{aligned} w_1(t) &= w_{01}e^t \\ w_2(t) &= e^{(2+i)t}w_{02} \\ w_3(t) &= e^{(2-i)t}w_{03} \end{aligned}$$

Nelle coordinate di partenza abbiamo $x(t) = Q^{-1}w(t)$, cioè

$$\begin{aligned} x(t) &= w_1(t) + \alpha w_2(t) + \bar{\alpha}w_3(t) \\ y(t) &= w_2(t) + w_3(t) \\ z(t) &= \frac{1-i}{2}w_2(t) + \frac{1+i}{2}w_3(t) \end{aligned}$$

Esercizio 6. Effettuando la sostituzione $z = y - 3$ il sistema si puó riscrivere nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + z \\ \dot{z} = -\alpha x - z \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

dove $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$

Per prima cosa calcoliamo lo spettro di $A$ il cui polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - \alpha,$$

e dunque abbiamo $\Sigma(A) = \{-1 - \sqrt{\alpha}, -1 + \sqrt{\alpha}\}$.
Caso $\alpha > 0$:
Calcoliamo gli autospazi.
$E(-1 - \sqrt{\alpha}) = Ker(A)$ è dato da

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha}x + z = 0 \\ \alpha x + \sqrt{\alpha}z = 0 \end{cases}$$

e quindi $E(-1 - \sqrt{\alpha}) = \big\{(t, -\sqrt{\alpha}t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\big\}$.
$E(-1 + \sqrt{\alpha}) = Ker(A + 2\mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} -\sqrt{\alpha}x + z = 0 \\ \alpha x - \sqrt{\alpha}z = 0 \end{cases}$$

dunque $E(-1 + \sqrt{\alpha}) = \big\{(t, \sqrt{\alpha}t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\big\}$.
Pertanto una base di autovettori sarà data da

$$v_1 = (1, -\sqrt{\alpha})$$
$$v_2 = (1, \sqrt{\alpha})$$

Abbiamo perciò

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{\alpha} & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & -1 + \sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema nelle nuove coordinate diventa

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = (-1 - \sqrt{\alpha})w_1 \\ \dot{w}_2 = (-1 + \sqrt{\alpha})w_2 \end{cases}, \qquad w(0) = Qx(0)$$

la cui soluzione è $(w_1(t), w_2(t)) = (e^{(-1-\sqrt{\alpha})t}, e^{(-1+\sqrt{\alpha})t})$. La soluzione del sistema iniziale sarà quindi data da

$$x(t) = Q^{-1}w(t)$$

Caso $\alpha = 0$:
Notiamo che la matrice A è già scritta in forma di blocco di Jordan, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Quindi la soluzione è:

$$\begin{cases} z(t) = e^{-t} \\ x(t) = e^{-t}(x_0 + t) \end{cases}$$

Caso $\alpha < 0$:
in questo caso gli autovalori sono complessi coniugati

$\lambda_1 = -1 - i\sqrt{\beta}, \lambda_2 = -1 + i\sqrt{\beta}$, con $\beta = -\alpha$
Pertanto una base di autovettori sarà data da

$$v_1 = (1, -i\sqrt{\beta})$$
$$v_2 = (1, i\sqrt{\beta})$$

Abbiamo perciò

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\beta} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{\beta} \\ \sqrt{\beta} & -1 \end{pmatrix}$$

e la soluzione nelle nuove coordinate sarà:

$$y(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\beta}t & -\sin\sqrt{\beta}t \\ \sin\sqrt{\beta}t & \cos\sqrt{\beta}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema iniziale sarà quindi data da

$$x(t) = Q^{-1}y(t)$$