Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato V - Martha Faraggiana e Enzo Livrieri (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Abbiamo il sistema meccanico $m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) = -2(x+2)(2x^2+2x-1)$ quindi

$$V(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x$$

Sappiamo che l'energia meccanica é una costante del moto per i sistemi meccanici.
Infatti posto $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ abbiamo che

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(m\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}) = 0$$

dato che $m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$.
Posto $\dot{x} = \frac{y}{m}$ troviamo che il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{y}{m} \\ \dot{y} = -2(x+2)(2x^2+2x-1) \end{cases}$$

Notiamo che i punti di equilibrio sono del tipo $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico per il potenziale.
I punti critici del potenziale sono $P_0 = (-2; 0)$, $P_1 = (\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; 0)$, $P_2 = (\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; 0)$ che saranno quindi anche i punti di equilibrio del sistema. Per quanto riguarda l'energia potenziale abbiamo

$$\lim_{x \to -\infty} V(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} V(x) = +\infty$$

$$V'(x) > 0 \iff -2 < x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

Notiamo inoltre che $V(0) = 0$.

Come giá detto i valori critici dell'energia saranno dunque i punti P_0, P_1, P_2. Quindi dal teorema di Dirichelet sappiamo che i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 minimo per $V(x)$ sono stabili; dato che P_0 e P_2 verificano tali ipotesi allora questi due punti sono stabili per il sistema. Il grafico di V è rappresentato in figura 1.

Da $E = m\dot{x}^2/2 + V(x)$ troviamo le curve $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$, che sono simmetriche rispetto all'asse x e definite solo per x tali che $V(x) \leq E$.
Se $E = V(x_0) = \min_x V(x)$ allora l'unica curva é costituita dal punto di equilibrio $(x_0, 0)$ che in particolare costituisce un orbita periodica.
Adesso disegnamo le curve di livello, al variare dell'energia meccanica:

1. per $E = V(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})$ avremo una sola traiettoria che rimane ferma nel punto P_2 per tutti i tempi;
2. per $V(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}) < E < V(-2)$ avremo orbite chiuse intorno al punto P_2;
3. per $E = V(-2)$ avremo una traiettoria che rimane ferma nel punto P_0 e un'orbita periodica intorno al punto P_2;

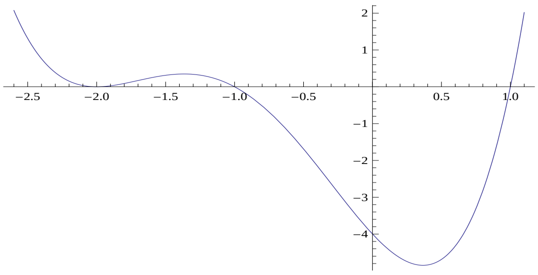

Figura 1: Potenziale $V(x)$.

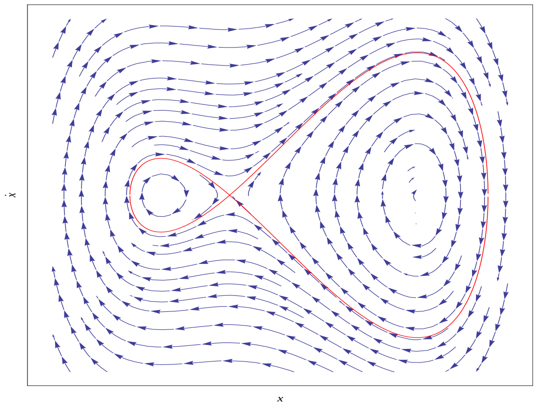

Figura 2: Orbite nello spazio delle fasi. In rosso le separatrici.

4. per $V(-2) < E < V(\frac{-1-\sqrt{3}}{2})$ avremo un'orbita periodica attorno al punto P_0 e un'orbita periodica intorno al punto P_2;

5. per $E = V(\frac{-1-\sqrt{3}}{2})$ avremo una traiettoria che rimane ferma nel punto P_1 e due traiettorie che partono dal punto P_1, una verso destra e una verso sinistra, e ritornano nel punto P_1 in tempi infiniti, girando intorno ai punti di equilibrio stabili;

6. per $E > V(\frac{-1-\sqrt{3}}{2})$ avrevo orbite periodiche a forma di *occhialetto*

Per tutte le orbite diverse da quelle del punto 5 (che indicheremo in seguito) tutte le orbite sono periodiche e il periodo é dato da

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

dove $x_{\pm}(E)$ sono i corrispondenti punti di inversione, che si possono ottenere come soluzioni dell'equazione $V(x) = E$. Quindi nel nostro caso avremo

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - (x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x)}}$$

Concludendo lo studio qualitativo le orbite limitate ma non periodiche sono quelle a livello di energia $E = V(\frac{-1-\sqrt{3}}{2})$ tranne quella che rimane ferma per tutti i tempi nel punto instabile.

<u>Esercizio 2.</u> Abbiamo il sistema meccanico $m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1-2e^{-\frac{1}{x}}}{2x^2}$ quindi

$$V(x) = \frac{1}{2x} + e^{-\frac{1}{x}}$$

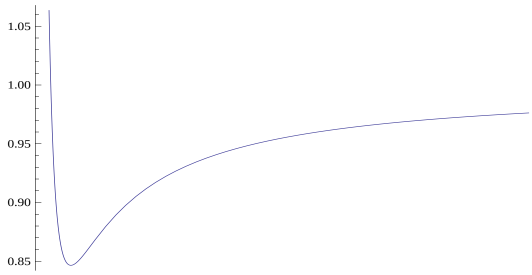

Figura 3: Potenziale $V(x)$.

Sappiamo che l'energia meccanica é una costante del moto per i sistemi meccanici.
Infatti posto $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ abbiamo che

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(m\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}) = 0$$

dato che $m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$.
Posto $\dot{x} = \frac{y}{m}$ troviamo che il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{y}{m} \\ \dot{y} = \dfrac{1-2e^{-\frac{1}{x}}}{2x^2} \end{cases}$$

Notiamo che i punti di equilibrio sono del tipo $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico per il potenziale.
L'unico punto critico del potenziale é $x_0 = \frac{1}{\ln 2}$ quindi l'unico punto di equilibrio del sistema sará $(\frac{1}{\ln 2}, 0)$. Per quanto riguarda l'energia potenziale abbiamo

$$\lim_{x\to 0_+} V(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} V(x) = 1 \qquad V'(x) > 0 \iff x > \frac{1}{\ln 2}$$

I valori critici dell'energia saranno dunque $V(+\infty) = 1$ e $V(\frac{1}{\ln 2}) = \frac{\ln^2 2+1}{2}$ (< 1).

Quindi dal teorema di Dirichelet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli quelli della forma $(x_0, 0)$ con x_0 minimo per $V(x)$ e dato che x_0 verifica tali ipotesi allora il punto é stabile per il sistema. Il grafico di V é rappresentato in figura 3. Da $E = m\ddot{x}^2/2 + V(x)$ troviamo le curve $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$, che sono simmetriche rispetto all'asse x e definite solo per x tali che $V(x) \leq E$.
Se $E = V(x_0) = \min_x V(x)$ allora l'unica curva é costituita dal punto di equilibrio $(x_0, 0)$ che in particolare costituisce un orbita periodica.
Se $V(x_0) < E < 1$ abbiamo traiettorie chiuse periodiche attorno al punto stabile che intersecano l'asse delle x in due punti $(x_-(E), x_+(E))$ (i punti corrispondono agli zeri dell'equazione $E - V(x)$) con tangente verticale in tali punti (infatti $\lim_{x\to x\pm} \dot{x}'(x) = +\infty$).
Per $E = 1$ abbiamo la prima curva aperta

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(1 - V(x))}$$

definita $\forall x > x_-$ dove x_- é l'unico zero del'equazione $1 - V(x)$.
Ora per $E > 1$ avremo traiettorie aperte definite sempre per $x > x_-$ con x_- unica radice dell'equazione $E - V(x)$.
Nei punti di inversione del moto $\dot{x} = 0$ avremo sempre tangenza verticale. I versi di percorrenza

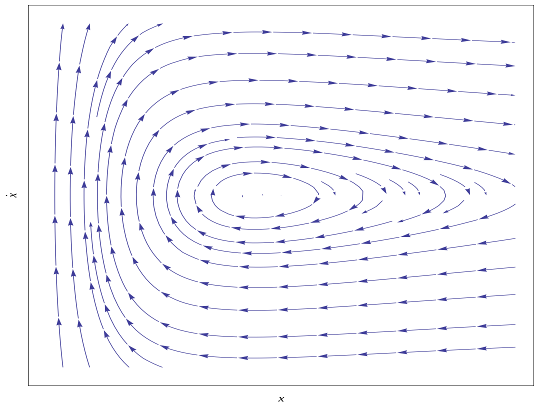

Figura 4: Orbite nello spazio delle fasi.

nei sistemi meccanici sono sempre da sinistra a destra nel semipiano superiore ($\dot{x} > 0$) e da destra a sinistra in quello inferiore ($\dot{x} < 0$).

Abbiamo giá osservato che si hanno traiettorie periodiche per $V(x_0) \leq E < 1$.
Il caso del punto di equilibrio é stato giá discusso e il periodo é chiaramente nullo. Per $V(x_0) < E < 1$ esprimiamo il periodo in termini di integrale definito. Sappiamo che il periodo é dato da

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Quindi nel nostro caso avremo

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2x} - e^{-\frac{1}{x}}}}$$

<u>Esercizio 3.</u> Cerchiamo un autovalore positivo della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -\mathcal{H}_0 & -\Gamma \end{pmatrix}$ del linearizzato. A tale scopo, studiamo il problema agli autovalori

$$\begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -\mathcal{H}_0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

che è equivalente alle condizioni: $\mathbf{v} = \lambda M \mathbf{u}$ e $-\mathcal{H}_0 \mathbf{u} - \Gamma \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. Sostituendo la prima equazione nella seconda troviamo la seguente riformulazione equivalente del problema agli autovalori:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \lambda M \mathbf{u} \\ -\mathcal{H}_0 \mathbf{u} - \lambda \Gamma M \mathbf{u} = \lambda^2 M \mathbf{u} \end{cases}$$

Si ricordi che nella seconda riga sia Γ che M sono per ipotesi matrici diagonali; in particolare Γ ed M *commutano*, i.e., $\Gamma M = M \Gamma$. Se M è la matrice diagonale con elementi diagonali m_i, sia M^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice diagonale con elementi diagonali m_i^α. Si noti in particolare che $M^\alpha M^\beta = M^{\alpha+\beta}$ e $M^\alpha M^{-\alpha} = I$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e che Γ commuta con ogni potenza di M. Moltiplicando da sinistra ambo i membri dell'equazione $-\mathcal{H}_0 \mathbf{u} - \lambda \Gamma M \mathbf{u} = \lambda^2 M \mathbf{u}$ per $M^{-1/2}$, troviamo:

$$-M^{-1/2} \mathcal{H}_0 \mathbf{u} - \lambda M^{-1/2} \Gamma M \mathbf{u} = \lambda^2 M^{1/2} \mathbf{u}$$

Inoltre, scrivendo in questa espressione $\mathbf{u} = M^{-1/2} M^{1/2} \mathbf{u} =: M^{-1/2} \mathbf{w}$, dove $\mathbf{w} = M^{1/2} \mathbf{u}$, possiamo ancora riscrivere l'equazione agli autovalori nella forma

$$-M^{-1/2} \mathcal{H}_0 M^{-1/2} \mathbf{w} - \lambda M^{-1/2} \Gamma M^{1/2} \mathbf{w} = \lambda^2 \mathbf{w}$$

Inoltre, ricordando che Γ commuta con $M^{1/2}$, il secondo termine non è nient'altro che $-\lambda\Gamma\mathbf{w}$ e quindi

$$\widetilde{\mathcal{H}}_0\mathbf{w} + \lambda\Gamma\mathbf{w} = -\lambda^2\mathbf{w}$$

dove $\widetilde{\mathcal{H}}_0 := M^{-1/2}\mathcal{H}_0 M^{-1/2}$. Si noti che $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ è una matrice reale simmetrica. Sia $\widetilde{\mu}_0$ is luo autovalore minimo che, per il principio variazionale, può scriversi come:

$$\widetilde{\mu}_0 = \inf_{\mathbf{x}:|\mathbf{x}|=\mathbf{1}} \mathbf{x}\cdot\widetilde{\mathcal{H}}_0\mathbf{x}$$

Si noti che, scegliendo $\mathbf{x} = c_0 M^{1/2}\mathbf{u}_0$, con $\mathbf{u}_0$ l'autovettore normalizzato corrispondente all'autovalore $\mu_0 < 0$ di $\mathcal{H}_0$ e $c_0 = (\mathbf{u}_0 \cdot M\mathbf{u}_0)^{-1/2}$, si ha:

$$\widetilde{\mu}_0 = \inf_{\mathbf{x}:|\mathbf{x}|=\mathbf{1}} \mathbf{x}\cdot\widetilde{\mathcal{H}}_0\mathbf{x} \le \left[\mathbf{x}\cdot\widetilde{\mathcal{H}}_0\mathbf{x}\right]\Big|_{\mathbf{x}=c_0M^{1/2}\mathbf{u}_0} = c_0^2\mu_0 < 0$$

Scegliamo ora $\mathbf{w}$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}^+$, come l'autovettore $\bar{\mathbf{w}}(\lambda)$ associato al piú piccolo autovalore di $\widetilde{\mathcal{H}}_0 + \lambda\Gamma$, che chiameremo $\widetilde{\mu}(\lambda)$. Ovviamente $\widetilde{\mu}(0) = \widetilde{\mu}_0$. Inoltre, sempre per il principio variazionale, dati $\lambda_1 \le \lambda_2$ e ricordando che Γ è semidefinita positiva:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}(\lambda_2) &= \inf_{\mathbf{x}:|\mathbf{x}|=\mathbf{1}} \mathbf{x}\cdot(\widetilde{\mathcal{H}}_0 + \lambda_2\Gamma)\mathbf{x} =: \mathbf{x_2}\cdot(\widetilde{\mathcal{H}}_0 + \lambda_2\Gamma)\mathbf{x_2} = \\
&= \mathbf{x_2}\cdot(\widetilde{\mathcal{H}}_0 + \lambda_1\Gamma)\mathbf{x_2} + (\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{x_2}\cdot\Gamma\mathbf{x_2} \ge \\
&\ge \mathbf{x_2}\cdot(\widetilde{\mathcal{H}}_0 + \lambda_1\Gamma)\mathbf{x_2} \ge \\
&\ge \inf_{\mathbf{x}:|\mathbf{x}|=\mathbf{1}} \mathbf{x}\cdot(\widetilde{\mathcal{H}}_0 + \lambda_1\Gamma)\mathbf{x} = \widetilde{\mu}(\lambda_1)
\end{aligned}$$

che dimostra il fatto che $\widetilde{\mu}(\lambda)$ è una funzione crescente di λ. La crescenza di $\widetilde{\mu}(\lambda)$, combinata con l'osservazione che $\widetilde{\mu}(0) < 0$, implica che l'equazione $\widetilde{\mu}(\lambda) = -\lambda^2$ ha un'unica soluzione positiva, che chiameremo λ^*. Quindi la scelta $\lambda = \lambda^* > 0$ e $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}}(\lambda^*)$ risolve l'equazione agli autovalori Eq.(), e abbiamo quindi trovato un autovalore positivo della matrice del linearizzato, come desiderato. In conclusione il punto di equilibrio $(\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$ è instabile.