Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato XI (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Il problema è quasi identico al secondo esercizio del secondo esonero A.A. 2011/12, alle cui soluzioni (disponibili in rete) rimandiamo per dettagli. L'unica domanda nuova nel problema assegnato in questo tutorato è la (f) nella quale si richiede di risolvere esplicitamente le equazioni di Eulero con il dato iniziale assegnato. Ricordiamo che tali equazioni assumono la forma

$$\dot{\Omega}_1 = -\Omega_2\Omega_3 \ , \quad \dot{\Omega}_2 = \Omega_1\Omega_3 \ , \quad \dot{\Omega}_3 = -\frac{3}{4}\Omega_1\Omega_2$$

con il dato iniziale tale che $L^2 = 2TI_2$. Usando la conservazione di energia cinetica e momento angolare, possiamo invertire Ω_1 e Ω_3 in funzione di Ω_2, trovando:

$$\Omega_1 = \pm\sqrt{\frac{144}{7m^2a^4}(2TI_3 - L^2) - \Omega_2^2} \ , \qquad \Omega_3 = \pm\sqrt{\frac{3}{4}\Big[\frac{24}{7m^2a^4}(L^2 - 2TI_1) - \Omega_2^2\Big]}$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione del moto per Ω_2 troviamo

$$\dot{\Omega}_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{4}\Big[\frac{144}{7m^2a^4}(2TI_3 - L^2) - \Omega_2^2\Big]\Big[\frac{24}{7m^2a^4}(L^2 - 2TI_1) - \Omega_2^2\Big]}$$

Usando i valori espliciti di $2TI_3 - L^2$ e di $L^2 - 2TI_1$ corrispondenti al dato iniziale assegnato, e definendo $x := \Omega_2/(1\ rad/s)$ otteniamo:

$$\dot{x} = \pm 2\sqrt{3}(1 - (x/2)^2)$$

che va risolta con dato iniziale $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = \frac{\Omega_1\Omega_3}{1\ rad/s} = 2\sqrt{3}\ s^{-1} > 0$, quindi:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{x(t)} \frac{dx}{1 - (x/2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{2 + x}{2 - x} \qquad \Rightarrow \qquad x = 2\frac{1 - e^{2\sqrt{3}\,t}}{1 + e^{2\sqrt{3}\,t}} \ .$$

In particolare $\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{\Omega}(t) = (0, 2, 0)$ rad/s.

Esercizio 2. Per i punti 1 e 2 del primo gruppo di domande, si vedano le dispense di Gentile, Capitolo 10, esempio 42.33, 42.34, o esercizi 14 e 16; per i punti 1 e 2 del secondo gruppo di domande, si vedano le dispense di Gentile, Capitolo 10, esercizi 15 e 17. Per quanto riguarda il punto 3 del primo gruppo di domande, è immediato verificare che, per simmetria, l'ellissoide d'inerzia dl cubo rispetto al centro è una sfera: quindi gli assi principali di inerzia rispetto al centro sono tre qualsiasi assi passanti per il centro. I momenti d'inerzia corrispondenti sono (pensando il cubo come una collezione di lamine quadrate omogenee di spessore infinitesimo impilate l'una sull'altra)

$$I_1^0 = I_2^0 = I_3^0 = \int \frac{1}{6}dm\ell^2 = \frac{1}{6}m\ell^2$$

dove dm è la massa di una lamina infinitesima, e dove abbiamo usato che il momento d'inerzia di una lamina rispetto ad un asse perpendicolare alla lamina e passante per il suo centro è $\frac{1}{6}m_{lamina}\ell_{lamina}^2$, vedi dispense di Gentile, esempio 42.35. Se poi cogliamo ripetere il calcolo rispetto ad uno dei vertici, notiamo che per simmetria uno degli assi d'inerzia coincide con la diagonale principale del cubo (sia questo l'asse 3), e gli altri due sono due assi qualsiasi (tra loro perpendicolari) ad esso perpendicolari (siano questi gli assi 1 e 2). Il momento d'inerzia I_3, visto che passa per il centro del cubo, coincide con il momento di inerzia $I_3^0 = \frac{1}{6}m\ell^2$. Gli altri due si ottengono con Huygens-Steiner:

$$I_1 = I_2 = I_1^0 + \frac{3}{4}m\ell^2$$

dove abbiamo usato che la distanza del centro da uno dei vertici è $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$.

<u>Esercizio 3.</u> Per i punti (a) e (b) si vedano le soluzioni dell'esercizio 5 dello scritto del 7/9/2012, A.A. 2011/2012, disponibili online. Per il punto 1, si noti che per ragioni di simmetria, gli assi principali di inerzia rispetto all'estremo A sono gli stessi che rispetto al centro di massa: in particolare, coincidono con l'asse della sbarretta (asse 3) e con due assi qualsiasi ad esso perpendicolari (assi 1 e 2). Il valore del momento d'inerzia I_3 rispetto ad A è lo stesso di quello calcolato rispetto al centro di massa, I_3^0, poiché l'asse 3 passa sia per A che per il centro di massa; quindi $I_3 = \frac{2}{5}Mr^2$. Gli altri due si possono calcolare a partire dai valori noti di I_1^0 e I_2^0, vedi soluzioni del problema 5 precedentemente citato ($I_1^0 = I_2^0 = \frac{m}{3\ell}[(\ell - z_{cm})^3 - z_{cm}^3] + \frac{2}{5}Mr^2 + M(\ell - z_{cm})^2$, con $z_{cm} = \frac{m+2M}{m+M}\frac{\ell}{2}$) usando Huygens-Steiner: $I_1 = I_2 = I_1^0 + (m+M)z_{cm}^2$.

Infine, per risolvere il punto 2, si ricordi che l'effetto della forza di gravità è lo stesso che si avrebbe immaginando tale forza tutta concentrata nel centro di massa del sistema. È quindi immediato verificare che il moto risultante è lo stesso di un pendolo semplice ideale, con punto di sospensione in A, lunghezza z_{cm} e massa $m + M$. Per il moto di tale sistema rimandiamo a quanto descritto a lezione per il pendolo matematico.