Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato II - Martha Faraggiana e Enzo Livrieri (soluzioni degli esercizi)

<u>Esercizio 1.</u> Cominciamo col calcolare gli autovalori dell'operatore $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ -\alpha & 3 & 0 \\ 3\alpha & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $(3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + \alpha^2 - 6\alpha + 3) = 0$ per cui le radici saranno $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{-\alpha^2 + 6\alpha + 1}$. Gli autovalori sono tutti reali e distinti se $3 - \sqrt{10} < \alpha < 3 + \sqrt{10}$, uno reale e due complessi coniugati se $\alpha < 3 - \sqrt{10} \quad \vee \quad \alpha > 3 + \sqrt{10}$ e reali e coincidenti nei casi $\alpha = 3 \pm \sqrt{10} \quad \vee \quad \alpha = 0 \vee \alpha = 6$

Se $3 - \sqrt{10} < \alpha < 3 + \sqrt{10}$, $\alpha \neq 0, 6$ cioè se ho tre autovalori distinti allora A è diagonalizzabile quindi determino le matrici del cambiamento di base per ottenere un sistema equivalente. Chiamiamo $\beta = \sqrt{-\alpha^2 + 6\alpha + 1}$ cosicchè $\Sigma(A) = \{3, 2+\beta, 2-\beta\}$. I rispettivi autovettori saranno $v_1 = (0, -\frac{2}{\alpha}, 1)$ $\quad v_2 = (-\frac{1+\beta}{3\alpha}, -\frac{1}{3}, 1)$ $\quad v_3 = (-\frac{1-\beta}{3\alpha}, -\frac{1}{3}, 1)$. Quindi $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+\beta}{3\alpha} & -\frac{1-\beta}{3\alpha} \\ -\frac{2}{\alpha} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2+\beta \end{pmatrix}$

Quindi il sistema nelle nuove coordinate diventa:

$$\begin{cases} \dot{w_1} = 3w_1 \\ \dot{w_2} = (2-\beta)w_2 \\ \dot{w_3} = (2+\beta)w_3 \end{cases}$$

Il dato iniziale diventa $w(0) = Q(1,2,1) = (w_1(0), w_2(0), w_3(0)$ e la soluzione è

$$\begin{cases} w_1 = w_1(0)e^{3t} \\ w_2 = w_2(0)e^{(2-\beta)t} \\ w_3 = w_3(0)e^{(2+\beta)t} \end{cases}$$

La soluzione del sistema iniziale é quindi $x(t) = Q^{-1}w(t)$.

Se $\alpha < 3 - \sqrt{10} \quad \vee \quad \alpha > 3 + \sqrt{10}$ allora gli autovalori sono uno reale e due complessi coniugati. Chiamiamo $\beta = \sqrt{|-\alpha^2 + 6\alpha + 1|}$ cosicché gli autovalori sono $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2 + i\beta$ $\lambda_3 = 2 - i\beta = \lambda_2^*$

Gli autovettori associati saranno

$v_1 = (0, -2, \alpha) \quad v_2 = (1 - i\beta, \alpha, -3\alpha) \quad v_3 = (1 + i\beta, \alpha, -3\alpha) = v_2^*$.

Scrivo $v_2 = (1, \alpha, -3\alpha) + i(0.\beta, 0) = v + iu$ ottenendo

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & \alpha & \beta \\ \alpha & -3\alpha & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{6\alpha - a^2}{\alpha\beta} & \frac{1}{\beta} & \frac{2}{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

Quindi $B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\beta \\ 0 & \beta & 2 \end{pmatrix}$. Il dato iniziale diventa $w(0) = Qx(0) = (w_{01}, w_{02}, w_{03})$.

La soluzione nelle nuove coordinate é

$$\begin{cases} w_1(t) = w_{01}e^{3t} \\ w_2(t) = e^{2t}(w_{02}\cos\beta t - w_{03}\sin\beta t) \\ w_3(t) = e^{2t}(w_{02}\sin\beta t + w_{03}\cos\beta t) \end{cases}$$

Quindi $x(t) = Q^{-1}w(t)$.

Vediamo ora i casi in cui due autovalori sono reali e coincidenti. Abbiamo tre casi.
Caso 1: $\alpha = -3 \pm \sqrt{10}$. L'autovalore doppio é $\lambda = 2$. Gli autovettori associati saranno $v_1 = (1, \alpha, -3\alpha)$ $\quad v_2 = (0, \alpha, -3\alpha)$ $\quad v_3 = (0, 1, -\frac{\alpha}{2})$.
Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ -3\alpha & -3\alpha & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & 2 \\ 0 & -6\alpha & -2\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il sistema nelle nuove coordinate diventa:

$$\begin{cases} \dot{w_1} = 2w_1 + w_2 \\ \dot{w_2} = 2w_2 \\ \dot{w_3} = 3w_3 \end{cases}$$

con dato iniziale $w(0) = Qx(0) = (1, 2\alpha + 1, -14\alpha) = (w_{01}, w_{02}, w_{03})$.
La soluzione in queste coordinate é:

$$\begin{cases} w_1(t) = w_{01}e^{2t} + w_{02}te^{2t} \\ w_2(t) = w_{02}e^{2t} \\ w_e(t) = w_{03}e^{3t} \end{cases}$$

Quindi $x(t) = Q^{-1}w(t)$.

Caso 2: $\alpha = 6$ allora gli autovalori sono $\lambda_1 = 3$ doppio e $\lambda_1 = 1$. La matrice A in questo caso non é diagonalizzabile e quindi troviamo una base di autovettori dove una parte sará in blocco di Jordan. I rispettivi autovettori sono $v_1 = (0, 1, -3)$ $\quad v_2 = (-\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}$ $\quad v_3 = (1, 3, -9)$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & -\frac{1}{6} & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 3 \\ 0 - 18 & -6 & \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema nelle nuove coordinate é $\dot{w}(t) = Q\dot{x}(t)$ con dato iniziale $w(0) = Qx(0) = (20, -42, -6)$
La soluzione sará:

$$\begin{cases} w_1(t) = e^{3t}(-22 - 42t) \\ w_2(t) = -42e^{3t} \\ w_3(t) = -6e^{t} \end{cases}$$

Otteniamo $x(t) = Q^{-1}w(t)$

Caso 3: $\alpha = 0$ gli autovalori sono: $\lambda_{1,2} = 3$ doppio e $\lambda_3 = 1$. La matrice A é diagonalizzabile. Gli autovettori sono
$v_1 = (1, 0, 1)$ $\quad v_2 = (0, 1, 0)$ $\quad v_3 = (1, 0, 0)$.

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allora $B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{w}(t) = Q\dot{x}(t)$

Il dato iniziale é La soluzione nelle nuove coordinate é $w(0) = Qx(0) = (3, 6, 3)$

$$\begin{cases} w_1(t) = 3e^{3t} \\ w_2(t) = 6e^{3t} \\ w_3(t) = 3e^{t} \end{cases}$$

Quindi$x(t) = Q^{-1}w(t)$

<u>Esercizio 2.</u> Risolviamo l'equazione per saparazione di variabili. Troviamo

$$\int_1^{x(t)} \frac{s\mathrm{d}s}{s^4 - 2s^2 + 2} = \int_0^t \mathrm{d}s$$

Nel primo integrale poniamo $r = s^2$ e troviamo:

$$\int_1^{x(t)} \frac{s\mathrm{d}s}{s^4 - 2s^2 + 2} = \frac{1}{2}\int_1^{x^2(t)} \frac{\mathrm{d}r}{r^2 - 2r + 2} = \frac{1}{2}\int_1^{x^2(t)} \frac{\mathrm{d}r}{1 + (r-1)^2} = \frac{1}{2}\arctan(x^2 - 1)$$

Il secondo integrale risulta semplicemente $\int_0^t \mathrm{d}s = t$ e quindi

$$\arctan(x^2 - 1) = 2t \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \sqrt{\tan 2t + 1}$$

La soluzione $x(t)$ é definita nell'intervallo $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4})$. L'insieme é aperto a sinistra perché noi cerchiamo $x(t) \in C^1$ e tra l'altro la soluzione non deve essere mai nulla sennó $f(x)$ non sarebbe neanche definita.

<u>Esercizio 3.</u> La funzione $f(x) = |x|$ é Lipschitzinana su tutto $\mathbb{R}$ e quindi la soluzione é unica $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. La soluzione peró cambia a seconda del valore di x_0. Distinguiamo i vari casi.
Se $x_0 = 0$ allora l'unica soluzione é la funzione identicamente nulla $x(t) \equiv 0$.
Se $x_0 > 0$ allora la soluzione si ottiene per separazione di variabili. Si ha $x(t) = x_0e^t$. Osserviamo che la soluzione é sempre positiva. Se $x_0 > 0 \Rightarrow x(t) \in (0, \infty); \forall t \in \mathbb{R}$
Si procede analogamente nel caso $x_0 < 0$ e si ha $x(t) = x_0e^{-t}$. Come sopra in questo caso la soluzione ha immagine in $(-\infty, 0)$
In ognuno dei tre casi si ha che la soluzione é definita $\forall t \in \mathbb{R}$ e in particolare nei casi $x_0 \neq 0$ la soluzione é $C^\infty(\mathbb{R})$ come ci aspettavamo dal momento che la funzione $f(x) = |x| \in C^\infty$ se x non cambia segno.

<u>Esercizio 4.</u> Siamo davanti a un'equazione del secondo ordine $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + y = f(t) + g(t)$ (oscillatore armonico forzato smorzato). Per risolvere l'equazione procederemo come segue: cercheremo una soluzione dell'equazione omogenea associata e poi cercheremo due soluzioni particolari una per il caso $f(t) = \sin\omega t$ e l'altra per il caso $g(t) = \sin 3\omega t$. La soluzione totale sarà la somma delle tre soluzioni. Scriviamo il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + y = 0$. Si ha $\lambda^2 + 2\beta\lambda + 1 = 0$ e quindi $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$.
Distinguiami tre diversi casi: $\beta \in (0, 1)$, $\beta = 1$ e $\beta \in (1, +\infty)$.

Se $\beta \in (1, +\infty)$ allora il polinomio ha due radici reali distinte ed è noto che una soluzione è $y_0(t) = Ae^{(-\beta-\sqrt{\beta^2-1})t} + Be^{(-\beta+\sqrt{\beta^2-1})t}$. Cerchiamo dunque una prima soluzione particolare (caso $f(t)$) quindi del tipo $\bar{y}(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$.

$$\dot{\bar{y}}(t) = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t \qquad \ddot{\bar{y}}(t) = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t$$

Ottengo

$$\ddot{y}+2\beta\dot{y}+y = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t + 2\beta A\omega\cos\omega t - 2\beta B\omega\sin\omega t + A\sin\omega t + B\cos\omega t = \sin\omega t$$

Quindi

$$A = \frac{1-\omega^2}{\omega^4 - 2\omega^2(1+2\beta^2)+1} \qquad B = \frac{2\beta\omega A}{1-\omega^2}$$

Per quanto riguarda la seconda soluzione particolare ($g(t)$) cerchiamo una funzione del tipo $\bar{y}_1(t) = C\sin 3\omega t + D\cos 3\omega t$.

Con conti analoghi otteniamo

$$-9\omega^2 C\sin 3\omega t - 9\omega^2 D\cos 3\omega t + 6\beta\omega C\cos 3\omega t - 6\omega\beta D\sin 3\omega t + C\sin 3\omega t + D\cos 3\omega t = \sin 3\omega t$$

$$C = \frac{1-9\omega^2}{81\omega^4 - 18\omega^2(1+2\beta^2)+1} \qquad D = \frac{6\omega\beta C}{1-9\omega^2}$$

Quindi la soluzione totale sarà $y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) + \bar{y}_1(t)$

Nel caso $\beta = 1$ abbiamo $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ quindi l'omogenea ha soluzione $y_0(t) = Ae^{-t} + Bte^{t}$. Le due soluzioni particolari sono $\bar{y}(t) = \frac{2\omega}{\omega^4-6\omega^2+1}\cos\omega t + \frac{1-\omega^2}{\omega^4-6\omega^2+1}\sin\omega t$ e
$\bar{y}_1(t) = \frac{1-9\omega^2}{81\omega^4-54\omega^2+1}\sin 3\omega t - \frac{6\omega}{81\omega^4-54\omega^2+1}\cos 3\omega t$.

Nel caso $\beta \in (0,1)$ si hanno due radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{|\beta^2-1|}$ e dunque la soluzione dell'omogenea associata è $y_0(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{|\beta^2-1|}t) + Be^{-\beta t}\sin(\sqrt{|\beta^2-1|}t)$

Nel caso $\beta = 0$ si ha che $x(t) = \sin t$ o $x(t) = \cos t$ risolvono l'omogenea associata mentre le soluzioni particolar sono date da

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{1-\omega^2}\sin\omega t$$

e da

$$\bar{y}_1(t) = \frac{1}{1-9\omega^2}\sin 3\omega t$$

Il fenomeno di risonanza si osserva nei circuiti quando la resistenza tende al valore minimo. Dato che in questo caso la resistenza é data proprio dal coefficiente 2β si ha risonanza quando $\beta = 0$

<u>Esercizio 5.</u> Risolviamo l'equazione per separazione di variabili:

$$2x(t)\dot{x}(t) = -\frac{6t^2+8t+3}{(1+t)^2(1+2t)^2}$$

e quindi

$$\int_1^{x(t)} 2s\mathrm{d}s = \int_0^t -\frac{6s^2+8s+3}{(1+s)^2(1+2s)^2}\mathrm{d}s \Rightarrow$$
$$x^2(t)+1 = \int_0^t -(\frac{A}{1+s} + \frac{B}{(1+s)^2} + \frac{C}{1+2s} + \frac{D}{(1+2s)^2})\mathrm{d}s$$

Risolvendo il sistema in A, B, C e D si ottiene $A = 0 = C, B = 1, D = 2$ e quindi otteniamo:

$$x^2(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+2t} - 1 \Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{1-2t^2}{(1+t)(1+2t)}}$$

L'intervallo massimale di esistenza della soluzione é $J = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Nel nostro caso $\bar{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e abbiamo che $\lim_{t \to \frac{1}{\sqrt{2}}} x(t) = 0$ che é finito. Ció non é in contraddizione col fatto che tale soluzione é massimale. Infatti il teorema del Prolungamento dice che la soluzione massimale $x(t) = x$ esce dai compatti contenuti nell'insieme di definizione (nel nostro caso $(x_1, x_2) = (0, +\infty)$) se la variabile indipendente t si avvicina ai punti sul bordo. In questo caso osserviamo che $x(t) > 0$ $\forall t \in J$ e quindi $\dot{x} = f(x,t) < 0$. Ciò implica che $x(t)$ è decrescente e quindi tende a 0 per $t \to \frac{1}{\sqrt{2}}$ (infatti $x(t) \to +\infty$ se $t \to -\frac{1}{2}$) Nel nostro caso l'insieme di definizione di f é $A = (0, +\infty) \times J$ ed é chiaro che i punti $(x(t), t)$ si avvicinano a ∂A se t tende ai valori sul bordo.