Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato VIII - Martha Faraggiana e Enzo Livrieri (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1.

Il moto dei due atomi é un esempio applicativo del problema dei due corpi. Dire che il sistema forma uno stato legato é equivalente a dire che l'orbita del punto individuato dalla coordinata relativa é limitata.

1. Abbiamo che $V(\rho) = \varepsilon[3(\frac{r_0}{\rho})^{10} - 5(\frac{r_0}{\rho})^6]$;
   ponendo per comoditá: $A = 3\varepsilon r_0^{10}$ e $B = 5\varepsilon r_0^6$, avremo che dobbiamo studiare il potenziale efficace:
   $$V_{eff}(\rho) = \frac{A}{\rho^{10}} - \frac{B}{\rho^6} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$$
   al variare di $A, B, \mu, L > 0$.

   Calcolando i limiti otteniamo che:
   $$\lim_{\rho\to 0^+} V_{eff}(\rho) = \infty \qquad \lim_{\rho\to +\infty} V(x) = 0$$

   Per quel che riguarda i valori critici del potenziale avremo che:
   $$V'_{eff}(\rho) = -\frac{10A}{\rho^{11}} + \frac{6B}{\rho^7} - \frac{L^2}{\mu\rho^3} = \frac{-10\mu A + 6\mu B\rho^4 - L^2\rho^8}{\mu\rho^{11}}$$

   Con la sostituzione $y = \rho^4$ otteniamo che:
   $$V'_{eff} = 0 \iff -L^2y^2 + 6\mu By - 10\mu A = 0$$

   che ha come radici:
   $$y_{1,2} = \frac{3\mu B \pm \sqrt{9\mu^2B^2 - 10\mu AL^2}}{L^2}$$

   Quindi il potenziale avrá $0, 1, 2$ punti critici a seconda che $9\mu^2B^2 - 10\mu AL^2$ sia maggiore, minore o uguale a 0.

   caso a) $9\mu^2B^2 - 10\mu AL^2 > 0 \Rightarrow L^2 < \frac{9\mu B^2}{10A}$:

   la derivata si annullerá dunque in quattro punti:
   $\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{3\mu B+\sqrt{9\mu^2B^2-10\mu AL^2}}{L^2}}$
   $\rho_2 = -\sqrt[4]{\frac{3\mu B+\sqrt{9\mu^2B^2-10\mu AL^2}}{L^2}}$
   $\rho_3 = \sqrt[4]{\frac{3\mu B-\sqrt{9\mu^2B^2-10\mu AL^2}}{L^2}}$
   $\rho_4 = -\sqrt[4]{\frac{3\mu B-\sqrt{9\mu^2B^2-10\mu AL^2}}{L^2}}$

chiaramente ρ_2 e ρ_4 devono essere scartati in quanto < 0, mentre ρ_1 é ben definito. Per quel che riguarda ρ_3 dobbiamo invece verificare che la quantitá sotto radice quarta sia positiva; questo é vero se:

$$3\mu B - \sqrt{9\mu^2 B^2 - 10\mu A L^2} > 0$$

ma essendo:

$$\sqrt{9\mu^2 B^2 - 10\mu A L^2} < 3\mu B \Rightarrow 3\mu B - \sqrt{9\mu^2 B^2 - 10\mu A L^2} > 0$$

Come si puó vedere facilmente dallo studio del segno della derivata prima ρ_3 e ρ_1 sono rispettivamente un minimo e un massimo per il potenziale (e quindi rispettivamente un punto stabile e un punto instabile per il sistema).

Il grafico di V_{eff} é rappresentato in Figura 1 (curva gialla).

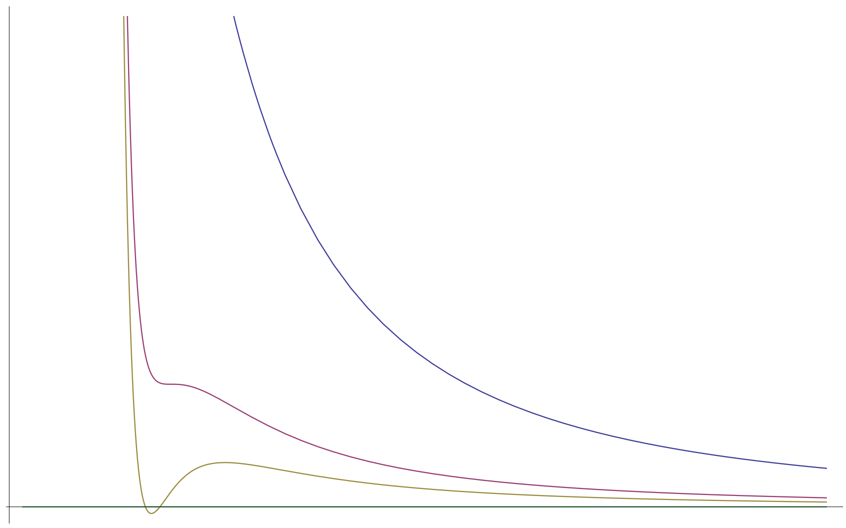

Figura 1: Il grafico di V_{eff} al variare dei parametri (Problema 1).

caso b) $9\mu^2 B^2 - 10\mu A L^2 = 0 \Rightarrow L^2 = \frac{9\mu B^2}{10A}$:

la derivata si annulla in un solo punto $\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{3\mu B}{L^2}}$.
Per studiare la natura del punto critico andiamoci a calcolare la derivata seconda del potenziale:

$$V''_{eff}(\rho) = \frac{110A}{\rho^{12}} - \frac{42B}{\rho^8} + \frac{3L^2}{\mu\rho^4};$$

e quindi:

$$V''_{eff}(\sqrt[4]{\frac{3\mu B}{L^2}}) = \frac{110A}{(\frac{3\mu B}{L^2})^3} - \frac{42B}{(\frac{3\mu B}{L^2})^2} + \frac{3L^2}{\mu\frac{3\mu B}{L^2}} = 0$$

(Ricordiamo che siamo nell'ipotesi $L^2 = \frac{9\mu B^2}{10A}$)

Quindi il punto ρ_1 é un punto di flesso per il potenziale e dunque un punto instabile per il sistema.

Il grafico di V_{eff} é rappresentato in Figura 1 (curva rossa).
caso c) $9\mu^2 B^2 - 10\mu A L^2 < 0 \Rightarrow L^2 > \frac{9\mu B^2}{10A}$:

la derivata del potenziale non si annulla in nessun punto.

Il grafico di V_{eff} é rappresentato in Figura 1 (curva blu).

Quindi in conclusone il sistema forma uno stato legato se le curve nel piano delle fasi sono chiuse e ció avviene se $L^2 < \frac{9\mu B^2}{10A}$ e se $V_{eff}(\rho_3) < E < V_{eff}(\rho_1)$.

2. Il valore dell'energia di legame della molecola é : $|U_0 - V_{eff}(\rho_1)|$, con $U_0 = V_{eff}(\rho_3)$ valore dell'energia nel punto stabile.

3. La discussione sui punti di equilibrio é stata giá effettuata al punto 1.

4. Si chiede di calcolare il limite del periodo del moto radiale se $E \to V_{eff}(\rho_3)$. Si pone $E_0 = V_{eff}(\rho_3)$ e sia $\varepsilon > 0$ piccolo. Al livello di energia $E_\varepsilon = E_0 + \varepsilon^2$ il moto si svolge su un orbita chiusa diffeomorfa a un cerchio ed é periodico di periodo

$$T_\varepsilon = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{(E_\varepsilon - V_{eff}(\rho))}}$$

dove $\rho_\pm$ sono le soluzioni dell'equazione $E_\varepsilon - V_{eff}(\rho) = 0$. Ora il nostro potenziale efficace V_{eff} é una funzione C^2 e convessa intorno a ρ_3 che é anche un minimo del potenziale e quindi un punto stabile (teorema di Dirichlet). Allora procedendo come nella dimostrazione del teorema **28.12** delle dispense di Gentile risulta

$$T_\varepsilon \to T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''_{eff}(\rho_3)}} \qquad \varepsilon \to 0$$

che corrisponde al periodo di un oscillatore armonico di costante elastica $k = V''_{eff}(\rho_3)$ ($T = \frac{2\pi}{\omega}$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$).

<u>Esercizio 2.</u> Sappiamo che la traiettoria della particella è simmetrica rispetto alla retta passante per il centro diffusore e il punto più vicino dell'orbita. Se ϕ_0 è l'angolo tra tale retta e un asintoto dell'orbita abbiamo che l'angolo di deviazione χ è dato da $\chi = |\pi - 2\phi_0|$ con

$$\phi_0 = \int_{\rho_-}^{+\infty} \frac{b\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{\rho^2} - \frac{2V}{mv_\infty^2}}}$$

con b il parametro d'impatto, v_∞ la velocità della particella all'infinito e V l'energia potenziale.

Per un disegno che aiuti la compresione si puó far riferimento al disegno nel capitolo 18 del Landau-Lifschitz. Nel nostro caso $V(\rho) = \frac{\alpha}{\rho^2}$ con $\alpha > 0$; l'integrale precedente risulta essere:

$$\phi_0 = \int_{\rho_-}^{+\infty} \frac{b\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{b^2}{\rho^2} - \frac{2\alpha}{mv_\infty^2\rho^2}}} = \int_{\rho_-}^{\infty} \frac{b\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{1 - \frac{b^2 mv_\infty^2 + 2\alpha}{mv_\infty^2\rho^2}}} =$$
$$= \int_{\rho_-}^{\infty} \frac{b\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{1 - (\sqrt{\frac{b^2 mv_\infty^2 + 2\alpha}{mv_\infty^2}}\frac{1}{\rho})^2}}$$

Chiamando $C = \sqrt{\frac{b^2mv_\infty^2+2\alpha}{mv_\infty^2}}$ e dopo aver fatto il cambiamento di variabile $z = \frac{C}{\rho}$, $\mathrm{d}z = -\frac{C}{\rho^2}\mathrm{d}\rho$ avremo che:

$$\phi_0 = \frac{b}{C}[\arccos(\frac{C}{\rho})]\Big|_{\rho_-}^{+\infty}$$

Ricordando che ρ_- è uno zero del radicando, abbiamo

$$\phi_0 = \frac{\pi b\sqrt{m}v_\infty}{2\sqrt{b^2mv_\infty^2+2\alpha}}$$

da cui ricaviamo

$$b^2 = \frac{-8\alpha\phi_0^2}{mv_\infty^2(4\phi_0^2-\pi^2)} = \frac{-2\alpha(\pi-\chi)^2}{mv_\infty^2(\chi^2-2\pi\chi)}$$

dove abbiamo usato $\phi_0 = \frac{1}{2}(\pi-\chi)$.

Ora, essendo riusciti a scrivere b in funzione dell'angolo di deviazione χ, la sezione d'urto differenziale $\mathrm{d}\sigma$ é semplicemente data dalla formula:

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi b(\chi)\Big|\frac{\mathrm{d}b(\chi)}{\mathrm{d}\chi}\Big|\mathrm{d}\chi$$

o anche, in termini dell'elemento di angolo solido $d\Omega$:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{b(\chi)}{\sin\chi}\Big|\frac{\mathrm{d}b(\chi)}{\mathrm{d}\chi}\Big|\mathrm{d}\Omega$$

Svolgendo i calcoli troviamo

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{mv_\infty^2}\frac{\pi-\chi}{\chi^2(2\pi-\chi)^2}\frac{d\Omega}{\sin\chi} .$$

<u>Esercizio 3.</u> Fissiamo in coordinate polari una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ \mathbf{e}_\mathbf{z} = (0,0,1) \end{cases}$$

Il vettore $\mathbf{e}_\mathbf{z}$ é parallelo al vettore $\mathbf{L}$ momento angolare e in particolare ortogonale al piano dove si svolge il moto. Esprimiamo i vettori posizione $\mathbf{r}$, velocitá $\dot{\mathbf{r}}$ e momento angolare $\mathbf{L}$ in tale base. Si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho \\ \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{L} = \mu\rho^2\dot{\theta}\mathbf{e}_\mathbf{z} \end{cases}$$

Inoltre $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_\rho$ e $\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}} = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$.

- Verifichiamo che il vettore di Runge-Lenz $\mathbf{A} = \mu\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}}$ é una grandezza conservata. Ricordiamo che

  $$\mathbf{e}_\rho \wedge \mathbf{e}_\mathbf{z} = -\mathbf{e}_\theta$$

  e che

  $$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho \qquad \dot{\mathbf{L}} = 0$$

Calcoliamo $\dot{\mathbf{A}}$

$$\dot{\mathbf{A}} = \mu\ddot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - \mu k \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{k}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho \wedge \mu\rho^2\dot{\theta}\mathbf{e}_\mathbf{z} - \mu k\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = \mu k\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta - \mu k\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = 0$$

Quindi il vettore $\mathbf{A}$ é una grandezza conservata.

- Chiaramente é ortogonale a $\mathbf{L}$ perché il primo termine gli é ortogonale per definizione di prodotto vettoriale mentre il secondo termine é parallelo a $\mathbf{e}_\rho$ che é ortogonale a $\mathbf{e}_\mathbf{z}$ e quindi a $\mathbf{L}$.

- Calcoliamo $|\mathbf{A}|^2$.

$$\mathbf{A} = \mu\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}} = \mu(\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \wedge \mu\rho^2\dot{\theta}\mathbf{e}_\mathbf{z} - \mu k\mathbf{e}_\rho = (\mu^2\rho^3\dot{\theta}^2 - \mu k)\mathbf{e}_\rho - \mu^2\rho^2\dot{\rho}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

cioé

$$\mathbf{A} = (\mu^2\rho^3\dot{\theta}^2 - \mu k, \mu\neg 2\rho^2\dot{\rho}\dot{\theta}, 0)$$

Ricordiamo che

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{\mu}(E + \frac{k}{\rho} - \frac{L^2}{2\mu\rho^2}) \qquad \dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho^2}$$

Dunque

$$|\mathbf{A}|^2 = \mu^2k^2 + 2\mu L^2 E$$

- In coordinate polari si ha

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = (\mu^2\rho^3\dot{\theta}^2 - \mu k, \mu^2\rho^2\dot{\rho}\dot{\theta}, 0)\cdot(\rho, 0, 0) = L^2 - \mu\rho k = |\mathbf{A}|\rho\cos(\theta - \theta_0)$$

cioé

$$\rho\big(1 + \frac{|\mathbf{A}|}{\mu k}\cos(\theta - \theta_0)\big) = \frac{L^2}{\mu k}.$$

Chiaramente l'angolo $\theta - \theta_0$ é l'angolo compreso tra $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{r}$.

- Per quanto riguarda le equazioni delle orbite nei casi $e = \frac{|\mathbf{A}|}{\mu k} \geq 1$ (che risulteranno essere parabole e iperboli) cfr. il Corollario **31.13** delle dispense del prof. Gentile.