

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013
FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO X - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (13-12-2012)

ESERCIZIO. Si calcolino la posizione del centro di massa e la matrice di inerzia per i seguenti corpi rigidi:

1. Molecola rigida costituita da 8 atomi identici di massa m ai vertici di un cubo di lato ℓ .
2. Molecola rigida costituita da 4 atomi identici di massa m ai vertici di un tetraedro regolare di lato ℓ .
3. Sbarra sottile (i.e., di spessore trascurabile) e uniforme (i.e., con distribuzione di massa costante) di lunghezza ℓ e massa totale M .
4. Anello sottile uniforme di raggio ℓ e massa M .
5. Lamina sottile uniforme di forma circolare di raggio ℓ e massa M .
6. Lamina sottile uniforme di forma quadrata di lato ℓ e massa M .

In tutti i casi sopra si identifichino i momenti di inerzia e i corrispondenti assi di inerzia.

Ricordiamo che, dato un corpo rigido costituito da una collezione di punti materiali P_i di massa m_i e di coordinate \mathbf{Q}_i in un sistema di riferimento solidale con il corpo stesso, la matrice d'inerzia è definita come la matrice I con elementi

$$I_{jl} = \sum_i m_i [\delta_{j,l} |\mathbf{Q}_i|^2 - (\mathbf{Q}_i)_j (\mathbf{Q}_i)_l] .$$

I momenti e gli assi di inerzia sono gli autovettori e le autodirezioni di I , rispettivamente. Nel caso di una distribuzione continua di massa, la definizione di I va modificata come segue:

$$I_{jl} = \int dm(\mathbf{Q}) [\delta_{j,l} |\mathbf{Q}|^2 - (\mathbf{Q})_j (\mathbf{Q})_l]$$

dove $dm(\mathbf{Q}) = \rho(\mathbf{Q})d^3\mathbf{Q}$ nel caso in cui la massa abbia una densità per unità di volume $\rho(\mathbf{Q})$ finita, oppure $dm(\mathbf{Q}) = f(\mathbf{Q})d\sigma$ nel caso in cui la massa abbia una densità superficiale $f(\mathbf{Q})$ finita (nel qual caso $d\sigma = d\sigma(\mathbf{Q})$ è l'elemento infinitesimo di superficie), oppure $dm(\mathbf{Q}) = \lambda(\mathbf{Q})d\ell$ nel caso in cui la massa abbia una densità lineare $\lambda(\mathbf{Q})$ finita (nel qual caso $d\ell = d\ell(\mathbf{Q})$ è l'elemento infinitesimo di linea).