

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013**  
**FM210 - Fisica Matematica 1**

TUTORATO X - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (13-12-2012)

ESERCIZIO. Si calcolino la posizione del centro di massa e la matrice di inerzia per i seguenti corpi rigidi:

1. Molecola rigida costituita da 8 atomi identici di massa  $m$  ai vertici di un cubo di lato  $\ell$ .
2. Molecola rigida costituita da 4 atomi identici di massa  $m$  ai vertici di un tetraedro regolare di lato  $\ell$ .
3. Sbarra sottile (i.e., di spessore trascurabile) e uniforme (i.e., con distribuzione di massa costante) di lunghezza  $\ell$  e massa totale  $M$ .
4. Anello sottile uniforme di raggio  $\ell$  e massa  $M$ .
5. Lamina sottile uniforme di forma circolare di raggio  $\ell$  e massa  $M$ .
6. Lamina sottile uniforme di forma quadrata di lato  $\ell$  e massa  $M$ .

In tutti i casi sopra si identifichino i momenti di inerzia e i corrispondenti assi di inerzia.

*Ricordiamo che, dato un corpo rigido costituito da una collezione di punti materiali  $P_i$  di massa  $m_i$  e di coordinate  $\mathbf{Q}_i$  in un sistema di riferimento solidale con il corpo stesso, la matrice d'inerzia è definita come la matrice  $I$  con elementi*

$$I_{jl} = \sum_i m_i [\delta_{j,l} |\mathbf{Q}_i|^2 - (\mathbf{Q}_i)_j (\mathbf{Q}_i)_l] .$$

*I momenti e gli assi di inerzia sono gli autovettori e le autodirezioni di  $I$ , rispettivamente. Nel caso di una distribuzione continua di massa, la definizione di  $I$  va modificata come segue:*

$$I_{jl} = \int dm(\mathbf{Q}) [\delta_{j,l} |\mathbf{Q}|^2 - (\mathbf{Q})_j (\mathbf{Q})_l]$$

*dove  $dm(\mathbf{Q}) = \rho(\mathbf{Q})d^3\mathbf{Q}$  nel caso in cui la massa abbia una densità per unità di volume  $\rho(\mathbf{Q})$  finita, oppure  $dm(\mathbf{Q}) = f(\mathbf{Q})d\sigma$  nel caso in cui la massa abbia una densità superficiale  $f(\mathbf{Q})$  finita (nel qual caso  $d\sigma = d\sigma(\mathbf{Q})$  è l'elemento infinitesimo di superficie), oppure  $dm(\mathbf{Q}) = \lambda(\mathbf{Q})d\ell$  nel caso in cui la massa abbia una densità lineare  $\lambda(\mathbf{Q})$  finita (nel qual caso  $d\ell = d\ell(\mathbf{Q})$  è l'elemento infinitesimo di linea).*