

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013**  
**FM210 - Fisica Matematica 1**

TUTORATO STRAORDINARIO

ESERCIZIO 1. Sia data una lamina piana quadrata omogenea di massa  $m$  e di lato  $a$ . La lamina è rigida e sospesa ad un suo vertice, che chiameremo  $O$ . Il moto della lamina attorno al punto fisso  $O$  è descritto dalla seconda equazione cardinale della dinamica in assenza di forze esterne.

- a) Si calcolino i momenti principali di inerzia  $I_1 \leq I_2 \leq I_3$  del corpo rispetto a  $O$ .
- b) Si determinino i corrispondenti assi principali di inerzia  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ .
- c) Si determinino i valori della velocità angolare corrispondenti a rotazioni stazionarie.
- d) Si scrivano le equazioni di Eulero per le componenti della velocità angolare  $\Omega(t)$  nel sistema di riferimento  $K = (O; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  solidale con la lamina.
- e) Si determinino gli integrali primi per tali equazioni.
- f) Si verifichi che la soluzione  $\Omega(t)$  alle equazioni di Eulero con dato iniziale  $\Omega(0) = (2, 0, \sqrt{3})rad/s$  è aperiodica. Si risolva esplicitamente tale moto e, in particolare, si calcoli  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t)$ .

ESERCIZIO 2. Si calcolino la posizione del centro di massa, la matrice di inerzia, i momenti e gli assi principali di inerzia (rispetto al centro di massa) per i seguenti corpi rigidi:

1. Cilindro retto omogeneo di massa  $m$ , altezza  $h$  e raggio  $R$ .
2. Sfera omogenea di massa  $m$  e raggio  $R$ .
3. Cubo omogeneo di massa  $m$  e raggio  $\ell$ .

Si ripeta poi il calcolo degli assi e dei momenti principali d'inerzia (rispetto al punto fisso) nel caso in cui i solidi di cui sopra siano vincolati a ruotare liberamente attorno a un punto fisso, scelto nel modo seguente:

1. Cilindro retto omogeneo: punto fisso nel centro di una delle basi.
2. Sfera omogenea: punto fisso in un punto della superficie.
3. Cubo omogeneo: punto fisso in uno dei vertici.

ESERCIZIO 3. Si consideri il corpo rigido costituito da una sbarretta uniforme di estremi  $A$  e  $B$ , lunghezza  $\ell$ , massa  $m$  e spessore trascurabile alla cui estremità  $B$  è saldata una pallina di massa  $M$  e raggio  $r$  (la pallina è saldata in modo tale che il suo centro coincida con  $B$ ).

- a) Si trovi la posizione del centro di massa del corpo rigido.
- b) Si calcolino i momenti principali di inerzia e i corrispondenti assi rispetto al centro di massa.

Si immagini poi di fissare il corpo rigido all'estremo  $A$ :

1. Come cambiano gli assi e i momenti principali di inerzia, se calcolati ora rispetto al punto fisso?
2. Si supponga che il corpo sia libero di ruotare attorno ad  $A$  e che si muova sotto l'effetto della forza di gravità e della reazione vincolare in  $A$ . Si descriva e si risolva il moto con dato iniziale corrispondente al corpo rigido fermo, con l'asse  $AB$  ad un angolo  $\theta_0$  dalla verticale.