

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013**  
**FM210 - Fisica Matematica 1**

TUTORATO II - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (11-10-2012)

ESERCIZIO 1. Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \alpha y + 2z \\ \dot{y} = -\alpha x + 3y \\ \dot{z} = 3\alpha x + 3z \end{cases}$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  con dato iniziale  $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 2, 1)$ .

ESERCIZIO 2. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2 + x^4 - 2x^2}{x} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo massimale di esistenza.

ESERCIZIO 3. Si consideri il seguente problema di Cauchy in  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Stabilire quante soluzioni esistono al variare di  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Poi trovarne una e discuterne la regolarità in  $t$ .

ESERCIZIO 4. Si determini al variare di  $\beta \geq 0$  l'integrale generale dell'equazione

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + y = \sin \omega t + \sin 3\omega t$$

che rappresenta una particella di massa  $m = 1$  vincolata ad una molla con costante elastica  $k = 1$ , in presenza di attrito viscoso con coefficiente pari a  $2\beta$  e di una forza esterna periodica di periodo  $2\pi/\omega$ . Dato  $\beta > 0$ , per quali valori di  $\omega$  si verifica il fenomeno della risonanza?

ESERCIZIO 5. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con  $f \in C^1(A \times B, \mathbb{R})$  con  $A = (x_1, x_2)$  e  $B = (\alpha, \beta)$  intervalli aperti di  $\mathbb{R}$ . Sia  $u : J \subseteq B \rightarrow E \subseteq A$  una soluzione massimale del problema. Si ricordi che per i teoremi di prolungamento massimale nel caso non autonomo, se  $J = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  con  $\bar{\beta} < \beta$ , allora per  $t \rightarrow \bar{\beta}^-$  la soluzione esce da ogni compatto  $K \subset A$ .

- Risolvere l'equazione nel caso

$$\begin{cases} f(x, t) = -\frac{6t^2 + 8t + 3}{2x(1+t)^2(1+2t)^2} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

e dimostrare che la funzione  $u(t)$  ammette limite finito per  $t \rightarrow \bar{\beta}^-$ .

- Spiegare come mai il fatto che  $\lim_{t \rightarrow \bar{\beta}^-} u(t)$  esista e sia finito non é in contraddizione con il teorema di prolungamento massimale ricordato sopra.