Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO III - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (18-10-2012)

<u>ESERCIZIO 1.</u> Si consideri il sistema meccanico planare con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{1+x^2}\, y, \\ \dot{y} = -\dfrac{xy^2}{2\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

a) Si trovi una costante del moto;

b) Si determini un insieme di dati iniziali per cui la soluzione è globale nel tempo.

<u>ESERCIZIO 2.</u> Sia dato il sistema meccanico unidimensionale con $r \in \mathbb{R}^+$ e $\dot{r}(0) = v_0 < 0$

$$m\ddot{r} = -\frac{\alpha}{2r^3},$$

con $\alpha > 0$.

a) Si trovi una costante del moto.

b) Usando la legge di conservazione trovata, esprimere $\dot{r}$ in funzione di r.

c) Integrando per separazione di variabili la relazione precedente, si calcoli il tempo di caduta nel centro $r = 0$ in termini di un integrale definito; se ne traggano le conseguenze sull'esistenza globale della soluzione.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Si consideri il sistema meccanico unidimensionale con $x \in \mathbb{R}$

$$\ddot{x} = 2x \exp\left\{x^2\right\}.$$

a) Si trovi una costante del moto.

b) Si trovi un punto di equilibrio del sistema.

c) Integrando per separazione di variabili la legge di conservazione trovata, si calcoli in termini di un integrale definito il tempo necessario affinché il moto con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (\varepsilon, 0)$ arrivi all'infinito. Si usi tale informazione per discutere la stabilità del punto di equilibrio.

<u>ESERCIZIO 4.</u> Diciamo che una matrice a coefficienti reali M è definita positiva (e scriviamo $M > 0$) se la forma quadratica $\mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} > 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Si dimostri che:

a) se M è simmetrica, allora $M > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0, \forall \lambda \in \Sigma(M)$;

b) nel caso generale, ovvero M non necessariamente simmetrica, allora $M > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\lambda > 0, \forall \lambda \in \Sigma(M)$, mentre $\mathrm{Re}\lambda > 0, \forall \lambda \in \Sigma(M) \not\Rightarrow M > 0$.

<u>ESERCIZIO 5.</u> Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale su $(0, +\infty)$ descritto dall'equazione $\ddot{x} = -U'(x)$ con $U(x) = -\frac{1}{x} + 4(x-1)^2$.

a) Si determinino i punti di equilibrio del sistema.

b) Si dimostri che le soluzioni con dati iniziali tali che $\dot{x}_0 = 0$ e $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ sono definite globalmente nel passato e nel futuro.

c) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno ai punti di equilibrio e si determinino i corrispondenti autovalori. Si può concludere qualcosa sulla stabilità dei punti di equilibrio trovati?

<u>Esercizio 6.</u> Per un sistema dinamico non autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ diremo che $\mathbf{x}_0$ è punto di equilibrio se $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{0}\ \forall t$. Tale punto di equilibrio si dirà stabile, se si verifica la condizione del caso non autonomo *per ogni tempo t_0 in cui viene assegnato il dato iniziale.*

Si consideri ora il problema di Cauchy a variabili separabili con $r \in \mathbb{R}^+$

$$\dot{r} = f(r, t) = \beta \left(1 - \frac{r}{R}\right) e^{\lambda t},$$

con $\beta, R, \lambda > 0$ e condizione iniziale $r(t_0) = r_0$.

a) Si verifichi che $f(r, t)$ è abbastanza regolare perché si possano applicare i teoremi di esistenza e unicità locale e i teoremi di prolungamento.

b) Si trovi un punto di equilibrio.

c) Si trovi la soluzione del problema di Cauchy.

d) Si dica per quali dati iniziali la soluzione è globale nel tempo.

e) Si usi il comportamento della soluzione generica del problema di Cauchy per discutere la stabilità del punto di equilibrio.