

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013**  
**FM210 - Fisica Matematica 1**

TUTORATO IV - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (25-10-2012)

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema planare con  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + x^2) y, \\ \dot{y} = \frac{1}{x} - (1 + y^2)x \end{cases}$$

- a) Si trovi una costante del moto;
- b) Si determini un insieme di dati iniziali per cui il sistema ammette soluzione globale.
- c) Si trovino i punti di equilibrio del sistema;
- d) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno ai punti di equilibrio e se ne discutano le conseguenze sulla stabilità dei punti di equilibrio;
- e) Si usi la funzione ricavata al punto a) per costruire una funzione di Ljapunov e discutere la stabilità dei punti di equilibrio.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema bidimensionale ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ,  $m, \alpha, \gamma > 0$ )

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\alpha (1 + |\dot{\mathbf{x}}|^2) \mathbf{x} - \gamma |\dot{\mathbf{x}}|^2 \dot{\mathbf{x}}.$$

- a) si determini il punto di equilibrio del sistema;
- b) si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno al punto di equilibrio e se ne discutano le conseguenze sulla stabilità del punto;
- c) si verifichi se la funzione

$$W(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} \log(1 + |\dot{\mathbf{x}}|^2) + \alpha \frac{|\mathbf{x}|^2}{2},$$

è una funzione di Ljapunov e se ne traggano le conseguenze sulla stabilità del punto di equilibrio.

- d) Si stimi il bacino di attrazione del punto di equilibrio.

ESERCIZIO 3. Sia dato il sistema dinamico descritto dall'equazione

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} - |\dot{\mathbf{x}}|^4 \dot{\mathbf{x}} - (1 - |\mathbf{x}|^2)^2 \dot{\mathbf{x}},$$

con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

- a) Si trovi la posizione di equilibrio del sistema.
- b) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno al punto di equilibrio e si determinino i corrispondenti autovalori. Cosa si può concludere sulla stabilità del punto di equilibrio?
- c) Si verifichi che  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$  con  $\mathbf{y} := \dot{\mathbf{x}}$  è una funzione di Ljapunov per il sistema in un intorno del punto di equilibrio e si stimi esplicitamente tale intorno. Cosa si può concludere sulla (asintotica) stabilità del punto di equilibrio?

ESERCIZIO 4. Il moto di un punto materiale di massa  $m$  e coordinate  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  è descritto dalle equazioni del moto

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -k \left( 1 - \frac{|\mathbf{x}|^2}{R^2} \right)^3 \mathbf{x} - \gamma \dot{\mathbf{x}},$$

con  $k$ ,  $R$  e  $\gamma$  parametri reali positivi.

- a) Si trovi il sistema dinamico associato;
- b) Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema;
- c) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno ai punti di equilibrio e se ne discutano le conseguenze sulla stabilità dei punti di equilibrio;
- d) Nel caso  $\gamma = 0$  si trovi una costante del moto;
- e) Si usi l'informazione al punto d) per costruire una funzione di Ljapunov e discutere la stabilità dei punti di equilibrio in assenza di attrito.

ESERCIZIO 5. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$m\ddot{x} = kx^3,$$

con  $m, k > 0$ .

- a) Si trovi una quantità conservata per il sistema meccanico;
- b) Si scriva il sistema dinamico associato e si trovino i relativi punti di equilibrio;
- c) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno ai punti di equilibrio e se ne discutano le conseguenze sulla stabilità dei punti di equilibrio;
- d) Si sfrutti la costante del moto al punto a) per ricavare  $\dot{x}$  in funzione di  $x$  e si integri l'equazione così trovata. Si sfrutti la soluzione esplicita per discutere la stabilità dei punti di equilibrio.
- e) Si usi la costante del moto al punto a) per costruire una funzione di Ljapunov e discutere la stabilità dei punti di equilibrio.