

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013
FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO IV - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (25-10-2012)

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema planare con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + x^2) y, \\ \dot{y} = \frac{1}{x} - (1 + y^2)x \end{cases}$$

- a) Si trovi una costante del moto;
- b) Si determini un insieme di dati iniziali per cui il sistema ammette soluzione globale.
- c) Si trovino i punti di equilibrio del sistema;
- d) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno ai punti di equilibrio e se ne discutano le conseguenze sulla stabilità dei punti di equilibrio;
- e) Si usi la funzione ricavata al punto a) per costruire una funzione di Ljapunov e discutere la stabilità dei punti di equilibrio.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema bidimensionale ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $m, \alpha, \gamma > 0$)

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\alpha(1 + |\dot{\mathbf{x}}|^2)\mathbf{x} - \gamma|\dot{\mathbf{x}}|^2\dot{\mathbf{x}}.$$

- a) si determini il punto di equilibrio del sistema;
- b) si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno al punto di equilibrio e se ne discutano le conseguenze sulla stabilità del punto;
- c) si verifichi se la funzione

$$W(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} \log(1 + |\dot{\mathbf{x}}|^2) + \alpha \frac{|\mathbf{x}|^2}{2},$$

è una funzione di Ljapunov e se ne traggano le conseguenze sulla stabilità del punto di equilibrio.

- d) Si stimi il bacino di attrazione del punto di equilibrio.

ESERCIZIO 3. Sia dato il sistema dinamico descritto dall'equazione

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} - |\dot{\mathbf{x}}|^4\dot{\mathbf{x}} - (1 - |\mathbf{x}|^2)^2\dot{\mathbf{x}},$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

- a) Si trovi la posizione di equilibrio del sistema.
- b) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno al punto di equilibrio e si determinino i corrispondenti autovalori. Cosa si può concludere sulla stabilità del punto di equilibrio?
- c) Si verifichi che $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$ con $\mathbf{y} := \dot{\mathbf{x}}$ è una funzione di Ljapunov per il sistema in un intorno del punto di equilibrio e si stimi esplicitamente tale intorno. Cosa si può concludere sulla (asintotica) stabilità del punto di equilibrio?

ESERCIZIO 4. Il moto di un punto materiale di massa m e coordinate $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ è descritto dalle equazioni del moto

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -k \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|^2}{R^2} \right)^3 \mathbf{x} - \gamma \dot{\mathbf{x}},$$

con k , R e γ parametri reali positivi.

- a) Si trovi il sistema dinamico associato;
- b) Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema;
- c) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno ai punti di equilibrio e se ne discutano le conseguenze sulla stabilità dei punti di equilibrio;
- d) Nel caso $\gamma = 0$ si trovi una costante del moto;
- e) Si usi l'informazione al punto d) per costruire una funzione di Ljapunov e discutere la stabilità dei punti di equilibrio in assenza di attrito.

ESERCIZIO 5. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$m\ddot{x} = kx^3,$$

con $m, k > 0$.

- a) Si trovi una quantità conservata per il sistema meccanico;
- b) Si scriva il sistema dinamico associato e si trovino i relativi punti di equilibrio;
- c) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno ai punti di equilibrio e se ne discutano le conseguenze sulla stabilità dei punti di equilibrio;
- d) Si sfrutti la costante del moto al punto a) per ricavare \dot{x} in funzione di x e si integri l'equazione così trovata. Si sfrutti la soluzione esplicita per discutere la stabilità dei punti di equilibrio.
- e) Si usi la costante del moto al punto a) per costruire una funzione di Ljapunov e discutere la stabilità dei punti di equilibrio.