

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013
FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO V - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (8-11-2012)

ESERCIZIO 1. Si studi qualitativamente il moto del sistema meccanico unidimensionale con $x \in \mathbb{R}$

$$m\ddot{x} = -2(x+2)(2x^2 + 2x - 1),$$

ovvero:

- a) Si trovi una costante del moto;
- b) Si trovino i punti di equilibrio del sistema;
- c) Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si trovino i valori critici dell'energia;
- d) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;
- e) Si disegnino le curve di livello del sistema al variare dell'energia meccanica;
- f) Si dica se ed eventualmente per quali valori dell'energia esistono orbite periodiche e se ne calcoli il periodo come integrale definito;
- g) Si trovino delle orbite limitate ma non periodiche.

ESERCIZIO 2. Si studi qualitativamente il moto del sistema meccanico unidimensionale con $x \in \mathbb{R}^+$

$$m\ddot{x} = \frac{1 - 2e^{-\frac{1}{x}}}{2x^2},$$

ovvero:

- a) Si trovi una costante del moto;
- b) Si trovino i punti di equilibrio del sistema;
- c) Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si trovino i valori critici dell'energia;
- d) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;
- e) Si disegnino le curve di livello del sistema al variare dell'energia meccanica;
- f) Si dica per quali valori dell'energia esistono orbite periodiche e si determini il periodo in termini di un integrale definito.

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema meccanico

$$M\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \Gamma \dot{\mathbf{x}}$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, M è una matrice diagonale definita positiva e Γ è una matrice diagonale semi-definita positiva. Sia $\mathbf{x}_0$ un punto critico del potenziale, di sella o di massimo proprio: in altre parole, si supponga che l'autovalore minimo dell'Hessiano di $U(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}_0$ è $\mu_0 < 0$. Si dimostri che $(\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$ è instabile.

[Schema di soluzione per l'esercizio 3: Si dimostri che esiste un autovalore positivo della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -\mathcal{H}_0 & -\Gamma \end{pmatrix}$ del linearizzato. Per farlo, si cerchi il corrispondente autovettore nella forma a blocchi:

$$\begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -\mathcal{H}_0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

e si mostri che $\mathbf{w} := M^{1/2}\mathbf{u}$ (dove $[M^{1/2}]_{i,j} = \delta_{i,j}M_{i,i}^{1/2}$) soddisfa l'equazione:

$$\tilde{\mathcal{H}}_0\mathbf{w} + \lambda\Gamma\mathbf{w} = -\lambda^2\mathbf{w}$$

dove $\tilde{\mathcal{H}}_0 = M^{-1/2}\mathcal{H}_0M^{-1/2}$. Ora si scelga $\mathbf{w}$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}^+$, come l'autovettore associato al piú piccolo autovalore di $\tilde{\mathcal{H}}_0 + \lambda\Gamma$, che chiameremo $\tilde{\mu}(\lambda)$. Per il principio variazionale per l'autovalore minimo di matrici simmetriche, $\tilde{\mu}(0) < 0$ e $\tilde{\mu}(\lambda)$ è continua e monotona crescente in λ . Quindi esiste un unico valore di λ positivo per cui $\mu(\lambda) = -\lambda^2$, che è l'autovalore positivo di A che stavamo cercando.]