

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013
FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO VI - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (15-11-2012)

ESERCIZIO 1. Si studi qualitativamente il moto del sistema planare con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = -4(y - y^3), \\ \dot{y} = 4(x - x^3), \end{cases}$$

ovvero:

- a) Si trovi una costante del moto;
- b) Si trovino i punti di equilibrio del sistema;
- c) Si dimostri che le orbite sono simmetriche rispetto all'asse delle x e all'inversione rispetto all'origine.
- d) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;
- e) Si dimostri che i valori critici dell'energia sono $0, 1, 2$;
- f) Si dimostri che l'equazione delle separatrici \mathcal{S}_{\pm} è nel primo quadrante $y = \sqrt{1 \pm x\sqrt{2-x^2}}$. Si disegnino le due curve corrispondenti alle diverse determinazioni del segno;
- g) Si dimostri che il verso del moto su \mathcal{S}_+ è da sinistra verso destra mentre su \mathcal{S}_- da destra verso sinistra;
- h) Si completi il grafico tracciando gli altri rami delle separatrici;
- i) Si disegnino le curve di livello per $E \in (0, 1)$ e si dimostri che
 - Sono composte da 4 orbite disgiunte;
 - Ciascuna orbita si svolge in un intorno di un punto di equilibrio con coordinate $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$;
 - Ciascuna orbita è delimitata da due rami delle separatrici;
 - Il verso di percorrenza è orario per tutte le orbite, in accordo con il verso di percorrenza sulle separatrici che le contengono;
- j) Si disegnino curve di livello per $E \in (1, 2)$ e si dimostri che
 - Ciascuna curva di livello è composta da due componenti connesse disgiunte, una racchiusa dalle separatrici interne \mathcal{S}_- e una contenente le separatrici esterne \mathcal{S}_+ ;
 - Le due componenti connesse individuano due orbite chiuse e periodiche;
 - L'orbita più interna si svolge in un intorno del punto di equilibrio $(0, 0)$;
 - Il verso di percorrenza delle due orbite è opposto, ovvero orario sull'orbita esterna e antiorario su quella interna;
 - L'ultima informazione può essere usata per dimostrare che $(0, 0)$ è stabile;
- k) Si disegnino le curve di livello per $E > 2$ e si dimostri che sono orbite chiuse periodiche percorse in senso orario contenenti le separatrici.

ESERCIZIO 2. Si studi qualitativamente il moto del sistema meccanico unidimensionale con $x \in \mathbb{R}^+$

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{x^2} + 1,$$

ovvero:

- a) Si trovi una costante del moto;
- b) Si trovino i punti di equilibrio del sistema;
- c) Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si trovino i valori critici dell'energia;
- d) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;
- e) Si disegnino le separatrici;
- f) Si disegnino le orbite nello spazio delle fasi;
- g) Si risolva il moto sulle separatrici.

ESERCIZIO 3. Si studi qualitativamente il sistema meccanico unidimensionale con $x \in \mathbb{R}^+$

$$m\ddot{x} = \frac{12}{x^{13}} - \frac{6}{x^7},$$

ovvero:

- a) Si trovi una costante del moto;
- b) Si trovino i punti di equilibrio del sistema;
- c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;
- d) Si disegnino le orbite nello spazio delle fasi;
- e) Si dica per quali valori dell'energia esistono orbite periodiche.