Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO VII - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (22-11-2012)

ESERCIZIO 1. Si studi qualitativamente il moto del sistema meccanico tridimensionale

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\partial_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}),$$

con

$$U(\mathbf{x}) = \alpha \frac{\log^2(|\mathbf{x}|/r_0)}{|\mathbf{x}|^2},$$

e $m, \alpha, r_0 > 0$. Piú in dettaglio:

a) Si trovino gli integrali primi del moto;

b) Si disegni il grafico del potenziale V e di quello efficace V_{eff} al variare del momento angolare;

c) Si studi qualitativamente il moto distinguendo i casi $L = 0$, $0 < L < \sqrt{\frac{m}{2}}$, $L = \sqrt{\frac{m}{2}}$ e $L > \sqrt{\frac{m}{2}}$. In particolare, nel caso $L = 0$:

- Si dimostri che esiste un punto di equilibrio instabile;
- Si disegnino le orbite nello spazio delle fasi;
- Si dica per quali valori dell'energia il moto complessivo è periodico e per tali valori si calcolino i punti di inversione e il periodo del moto come integrale definito.

d) Nel caso $0 < L < \sqrt{\frac{m}{2}}$:

- Si dimostri che esiste un punto di equilibrio stabile;
- Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$;
- Si dica per quali valori dell'energia il moto radiale è periodico;
- Per tali valori si calcolino i punti di inversione e il periodo del moto radiale come integrale definito;
- Si calcoli inoltre per gli stessi valori dell'energia il periodo del moto angolare come integrale definito;
- Si dica sotto quali condizioni il moto complessivo è periodico.

e) Nel caso $L = \sqrt{\frac{m}{2}}$:

- Si trovi un punto di equilibrio e se ne discuta la stabilità ;
- Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$;
- Si dimostri che non esistono orbite periodiche del moto radiale al di fuori del punto di equilibrio e si calcoli il periodo del moto complessivo corrispondente.

f) Nel caso $L > \sqrt{\frac{m}{2}}$:

- Si dimostri che non esistono punti di equilibrio;
- Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$.
- Si dimostri che non esistono orbite periodiche del moto radiale e si discutano qualitativamente le proprietà del moto sia radiale che complessivo.

<u>Esercizio 2.</u> Si studi qualitativamente il moto del sistema meccanico tridimensionale ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$) formato da due particelle di massa m dato da

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = -2\alpha \left(1 - 3\left|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right|^4\right)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\,, \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = -2\alpha \left(1 - 3\left|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right|^4\right)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\,, \end{cases}$$

con $m, \alpha > 0$, ovvero

a) Si decomponga il moto complessivo in moto del centro di massa più moto nella coordinata relativa e si studi qualitativamente il moto nella coordinata relativa;

b) Si trovino gli integrali primi del moto relativo;

c) Si disegni il grafico del potenziale efficace al variare del momento angolare, si disegnino le orbite nel piano delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$ e si discutano le proprietà qualitative risultanti del moto radiale e del moto complessivo. In particolare:

   (a) Per $L = 0$ si dica per quali valori dell'energia il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico;
   (b) Per $0 < L^2 < \frac{1}{12}m\alpha$ si trovino le condizioni sotto cui il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico;
   (c) Per $L^2 = \frac{1}{12}m\alpha$ si trovi un moto complessivo periodico nella coordinata relativa;
   (d) Per $L^2 > \frac{1}{12}m\alpha$ si dimostri che tutte le orbite sono aperte.

<u>Esercizio 3.</u> Si consideri l'oscillatore armonico bidimensionale

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x}$$

Come discusso ad esercitazioni, tutte le orbite del sistema sono periodiche. Quindi il moto del sistema, che a priori si svolge in uno spazio delle fasi 4-dimensionale, si svolge in realtà su una curva, cioè su un sottospazio unidimensionale dello spazio delle fasi. Tale riduzione dimensionale corrisponde a 3 integrali primi indipendenti (si noti che l'energia meccanica e il momento angolare in un sistema bidimensionale forniscono solo 2 grandezze conservate, quindi è necessario identificare un ulteriore integrale primo "nascosto).

1. Si determinino i 3 integrali primi riconoscendo che gli elementi della matrice simmetrica
   $$A_{ij} = \frac{m}{2}\dot{x}_i\dot{x}_j + \frac{k}{2}x_i x_j$$
   sono tutte grandezze conservate del moto (e si noti che una matrice simmetrica 2×2 ha solo 3 elementi di matrice indipendenti, poiché $A_{12} = A_{21}$).

2. Si riconosca che $\mathrm{Tr}A$ è uguale all'energia meccanica e che il $\det A$ è proporzionale al modulo quadro del momento angolare.

3. Si usi la conservazione dei 3 integrali primi per derivare l'equazione della traiettorie. Piú precisamente si verifichi che:

   (a) In coordinate polari,
   $$\frac{(\rho')^2}{\rho^6} + \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{mE}{L^2}\right)^2 = \frac{m^2}{L^4}\left[4A_{12}^2 + (A_{11} - A_{22})^2\right]$$
   dove $\rho' = \rho'(\theta) = \frac{d\rho}{d\theta}$.
   (b) Si verifichi che l'equazione $\rho = \rho(\theta)$ di un'ellisse centrata nell'origine in coordinate polari (che ha la forma $a^{-2}\rho^2\sin^2(\theta - \theta_0) + b^{-2}\rho^2\cos^2(\theta - \theta_0) = 1$ dove a, b sono i due semiassi) soddisfa l'equazione differenziale ricavata sopra. Si usi tale osservazione per concludere che la traiettoria descritta dalla soluzione alle equazioni del moto è un'ellisse e per calcolarne i semiassi in termini degli integrali primi del moto.