

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013**  
**FM210 - Fisica Matematica 1**

TUTORATO VIII - MARTHA FARAGGIANA E ENZO LIVRIERI (29-11-2012)

ESERCIZIO 1. Una molecola è costituita da due atomi identici di massa  $m = 2 * 10^{-30}$  Kg. L'interazione tra i due atomi (di coordinate  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ ) è descritta fenomenologicamente dal potenziale centrale  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ , dove

$$V(\rho) = \epsilon \left[ 3 \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^{10} - 5 \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^6 \right]$$

con  $\epsilon = 2 * 10^{-22} \text{m}^2 \text{Kg}/\text{s}^2$  e  $r_0 = 3 * 10^{-10} \text{m}$ . Si determinino:

1. L'insieme di valori degli integrali primi  $E$  (energia meccanica del moto relativo) ed  $L$  (momento angolare del moto relativo) per cui il sistema forma uno stato legato (molecola)
2. Il valore dell'energia di legame della molecola al variare di  $E, L$  nell'insieme di cui al punto 1 (con energia di legame si intende l'energia necessaria per separare i due atomi quando si trovano nello stato più legato possibile: in formule, è il valore assoluto della differenza tra l'energia  $U_0$  del punto stabile del moto radiale e il sup delle energie dei moti radiali periodici).
3. La distanza di equilibrio tra i due atomi (i.e., la distanza corrispondente al punto di equilibrio del moto radiale) al variare di  $L$
4. La frequenza di vibrazione attorno alla distanza di equilibrio del sistema (i.e., il valore del periodo del moto radiale nel limite  $E \rightarrow U_0^+$ )

ESERCIZIO 2. Si consideri un fascio di particelle di massa  $m$  che incide su un centro diffusore con una velocità  $v_\infty$ . Il potenziale centrale che descrive l'interazione tra le particelle del fascio e il centro della forza è  $V(\rho) = \alpha/\rho^2$  con  $\alpha > 0$ . Si determini la sezione d'urto differenziale del processo di diffusione.

ESERCIZIO 3. Si consideri il problema dei due corpi, i.e., il moto in campo centrale di due particelle di massa  $m_1, m_2$  che si attraggono con la forza generata dal potenziale gravitazionale  $V(\rho) = -k/\rho$  con  $k > 0$ . Si verifichi che, in aggiunta agli integrali primi  $E$  ed  $L$ , il moto relativo ammette un'ulteriore grandezza conservata, definita in termini del *vettore di Runge-Lenz*  $\mathbf{A} = \mu \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}}$ . In particolare, si verifichi che: (i) le tre componenti di  $\mathbf{A}$  sono integrali primi del moto; (ii)  $\mathbf{A}$  è ortogonale a  $\mathbf{L}$ ; (iii)  $|\mathbf{A}|^2$  è una funzione di  $E$  e di  $L$ . Quindi  $\mathbf{A}$  definisce una sola grandezza conservata aggiuntiva oltre  $E$  ed  $\mathbf{L}$ , che può essere scelta come l'angolo tra  $\mathbf{A}$  ed un asse di riferimento sul piano dell'orbita.

Usando la conservazione di  $\mathbf{A}$ , si determini l'equazione della traiettoria in coordinate polari. In particolare, si scriva  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot (\mu \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}})$  in coordinate polari e si riconosca che tale equazione è equivalente a  $\rho(1 + e \cos(\theta - \theta_0)) = L^2/\mu k$ , con  $e = |\mathbf{A}|/\mu k$ . Nel caso  $0 \leq e < 1$  si è già verificato a lezione che  $\rho = \rho(\theta)$  descrive al variare di  $\theta$  il luogo dei punti la cui somma delle distanze da due punti detti fuochi (uno dei quali coincidente con l'origine) è costante (ellisse). Nei casi in cui  $e \geq 1$ , si verifichi esplicitamente che l'equazione  $\rho(\theta) = \rho_0/(1 + e \cos(\theta - \theta_0))$  descrive una conica con uno dei fuochi centrato nell'origine, i.e., si verifichi che:

1. per  $e = 1$ ,  $\rho = \rho(\theta)$  descrive al variare di  $\theta$  il luogo dei punti equidistante dall'origine e da una retta non passante per l'origine detta direttrice (parabola);
2. per  $e > 1$ ,  $\rho = \rho(\theta)$  descrive al variare di  $\theta$  il luogo dei punti la cui differenza delle distanze da due punti detti fuochi (uno dei quali coincidente con l'origine) è costante (iperbole).