Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2012/2013

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato IX - Martha Faraggiana e Enzo Livrieri (6-12-2012)

Esercizio 1. Una piattaforma circolare di raggio R ruota attorno al suo asse con velocità angolare $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Un uomo parte al tempo $t = 0$ dal bordo e si muove camminando lungo un raggio verso il centro a velocità costante V_0 rispetto alla piattaforma.
Dopo aver fissato un sistema di riferimento fisso κ e uno mobile K solidale con l'uomo si determinino:

a) la legge di trasformazione di coordinate da κ a K;

b) la traiettoria percorsa dall'uomo in κ e il tempo che gli è necessario per raggiungere il centro;

c) la legge di trasformazione di velocità da κ a K;

d) le forze fittizie e quelle attive che agiscono sull'uomo.

Esercizio 2. Si consideri un pendolo costituito da una sferetta di massa m e diametro trascurabile attaccato a una sbarretta rigida di lunghezza ℓ e massa trascurabile, con punto di sospensione O. Il pendolo può oscillare attorno ad O su un piano verticale π che ruota con velocità angolare costante $\omega > 0$ attorno all'asse verticale passante per O. La condizione che il pendolo appartenga a π ad ogni istante è realizzata dalla presenza di due guide costituite da due piani verticali paralleli a distanza uguale al diametro della sferetta, tra i quali la sferetta stessa è "incastrata". L'attrito si può supporre trascurabile: in particolare la forza $\mathbf{T}$ esercitata dalla sbarretta sulla sferetta è diretta lungo la sbarretta stessa, mentre la forza $\mathbf{R}$ esercitata dalle guide sulla sferetta è ortogonale a π. Si studi il moto di tale pendolo rotante, ovvero, dopo aver fissato un sistema di riferimento fisso κ e uno mobile K solidale con π:

a) si scriva la legge di trasormazione delle coordinate e delle velocità da κ a K;

b) si scriva l'equazione del moto del pendolo nel sistema mobile K, tenendo conto della preenza delle "reazioni vincolari" $\mathbf{T}$ e $\mathbf{R}$;

c) proiettando le equazioni del moto del pendolo lungo tre opportune direzioni ortogonali, si eliminino $\mathbf{T}$ e $\mathbf{R}$ e si riconduca l'equazione del moto del pendolo ad un sistema meccanico conservativo unidimensionale;

d) si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità ;

e) si studino le curve di livello e si determini l'insieme dei dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche;

Esercizio 3. Si considerino due particelle P_1 e P_2 di coordinate $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ che interagiscono con una forza centrale $F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = -V'(\rho)\big|_{\rho=|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}$:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \end{cases}$$

Come discusso a lezione, l'equazione per $\rho = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ è

$$\mu\ddot{\rho} = -V'(\rho) - \partial_\rho\Big(\frac{L^2}{2\mu\rho^2}\Big) \tag{1}$$

Si riderivi tale equazione usando un cambiamento di riferimento da un sistema fisso a un sistema mobile e si mostri che il termine $-\partial_\rho\big(\frac{L^2}{2\mu\rho^2}\big)$ corrisponde all'effetto della forza centrifuga. Piú precisamente, una volta scelto un sistema di riferimento fisso κ con $\hat{e}_3 = \hat{L}$ e l'origine O sul piano π_0 a cui appartengono P_1 e P_2, si scelga un sistema di riferimento mobile K con O' coincidente con P_2, $\hat{\eta}_3 = \hat{e}_3$ e $\hat{\eta}_1 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}$. A questo punto:

1. Si scriva la legge di trasformazione delle coordinate da κ a K, determinando in particolare le espressioni di B e di $\boldsymbol{\omega}$ in termini dell'angolo θ tra $\hat{\eta}_1$ e $\hat{e}_1$ e della sua derivata $\dot{\theta}$.

2. Si scriva l'equazione del moto per P_1 in K, notando che in tale sistema di riferimento mobile P_1 ha coordinate $\mathbf{X}_1 = (\rho, 0, 0)$.

3. Si proietti l'equazione del moto per $\mathbf{X_1}$ nelle due direzioni coordinate $\hat{\eta}_1$ e $\hat{\eta}_2$. Si riconosca che la proiezione lungo $\hat{\eta}_2$ è equivalente alla conservazione del momento angolare, mentre la proiezione lungo $\hat{\eta}_1$ è equivalente alla Eq.(1), con il secondo termine al membro di destra corrispondente alla forza centrifuga.