Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato I (4-10-2013)

<u>Esercizio 1.</u> Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Si calcolino gli autovalori e gli autovettori al variare del parametro α: per quali scelte di α la matrice è diagonalizzabile?
- Scrivere la soluzione generale del sistema.
- Scrivere la soluzione particolare corrispondente al dato iniziale $\mathbf{x} = (1, 1)$.

Soluzione:

1 - Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$(3 - X)(-1 - X) - 2\alpha = X^2 - 2X - (2\alpha + 3)$$

quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{4 + 2\alpha}.$$

Gli autovettori di A sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3u + 2v = \lambda_\pm u \\ \alpha u - v = \lambda_\pm v \end{cases}$$

quindi gli autovettori di A sono

$$\eta_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ -(1 \mp \sqrt{1 + \frac{\alpha}{2}}) \end{pmatrix} u$$

con $x \in \mathbb{R}$. Le matrice A è diagonalizzabile se e solo se $\lambda_+ \neq \lambda_-$, i.e.,

$$\alpha \neq -2.$$

2.1 - Se $\alpha \neq -2$ allora

$$A = PDP^{-1}$$

dove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha}{2}} & -1 - \sqrt{1 + \frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{4 + 2\alpha} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{4 + 2\alpha} \end{pmatrix}$$

quindi

$$P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = DP^{-1}\mathbf{x}$$

quindi se $P^{-1}\mathbf{x} = (y_1, y_2)$, allora

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (1 + \sqrt{4 + 2\alpha})y_1 \\ \dot{y}_2 = (1 - \sqrt{4 + 2\alpha})y_2 \end{cases}$$

e quindi

$$y_1(t) = e^{\lambda_+ t} y_1(0) = e^{(1+\sqrt{4+2\alpha})t} y_1(0), \qquad y_2(t) = e^{\lambda_- t} y_2(0) = e^{(1-\sqrt{4+2\alpha})t} y_2(0)$$

quindi

$$P^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{x}(0)$$

dunque, usando

$$P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{4+2\alpha}} \begin{pmatrix} -1-\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}} & -1 \\ 1-\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

troviamo

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{4+2\alpha}} \begin{pmatrix} E_- + E_+\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}} & E_- \\ \frac{\alpha}{2}E_- & -E_- + E_+\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \mathbf{x}(0)$$

dove

$$\begin{cases} E_+ := e^{\lambda_+ t} + e^{\lambda_- t} = 2e^t \cosh(t\sqrt{4+2\alpha}) \\ E_- := e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t} = 2e^t \sinh(t\sqrt{4+2\alpha}) \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}} \left(\left(\sinh(t\sqrt{4+2\alpha}) + \cosh(t\sqrt{4+2\alpha})\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}\right) x_1(0) + \sinh(t\sqrt{4+2\alpha}) x_2(0) \right) \\ \\ x_2(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}} \left(\frac{\alpha}{2}\sinh(t\sqrt{4+2\alpha}) x_1(0) - \left(\sinh(t\sqrt{4+2\alpha}) - \cosh(t\sqrt{4+2\alpha})\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}\right) x_2(0) \right). \end{cases}$$

2.2 - Se $\alpha = -2$ allora $\lambda_\pm = \lambda := 1$ e $\eta_\pm = \eta := (1,-1)$ riduciamo la matrice A alla sua forma normale di Jordan: risolviamo

$$(A-\lambda)(u,v) = \eta$$

quindi

$$\begin{cases} 2u + 2v = 1 \\ -2u - 2v = -1 \end{cases}$$

quindi definiamo

$$\xi := \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

e

$$P := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e abbiamo

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi se $P^{-1}\mathbf{x} = (y_1, y_2)$, allora

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2 \end{cases}$$

e quindi

$$y_2(t) = e^t y_2(0)$$

e

$$\dot{y}_1 = y_1 + e^t y_2(0)$$

in conseguenza

$$y_1(t) = e^t(y_1(0) + t y_2(0)).$$

Quindi

$$P^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{x}(0)$$

dunque, usando

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

troviamo

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1+2t & 2t \\ -2t & 1-2t \end{pmatrix} \mathbf{x}(0).$$

3- Poniamo $\mathbf{x}(0) = (1,1)$. Quindi, se $\alpha \neq -2$, allora

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}} \left(2\sinh(t\sqrt{4+2\alpha}) + \cosh(t\sqrt{4+2\alpha})\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}\right) \\ x_2(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}} \left((\frac{\alpha}{2}-1)\sinh(t\sqrt{4+2\alpha}) + \cosh(t\sqrt{4+2\alpha})\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}\right). \end{cases}$$

Se $\alpha = 2$ la soluzione si ottiene per sostituzione del dato iniziale assegnato nell'equazione finale per $\mathbf{x}(t)$ nella sezione 2.2.

<u>Esercizio 2.</u> Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_3 + 1 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = 5x_1 + x_2 + x_3 - 2 \end{cases}$$

- Si stabilisca se il sistema ammette un punto fisso (chiamato anche punto di equilibrio): i.e., si stabilisca se esiste un dato iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ il cui moto corrispondente è costante: $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$.
- Si trovi la soluzione corrispondente al dato iniziale con dato iniziale $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0,1,0)$.

Soluzione:

1 - Cerchiamo i punti fissi risolvendo l'equazione

$$\begin{cases} 0 = x_1 + x_3 + 1 \\ 0 = -4x_1 - x_2 \\ 0 = 5x_1 + x_2 + x_3 - 2. \end{cases}$$

Se chiamiamo (1) la prima equazione dell' sistema, (2) la seconda e (3) la terza, e se facciamo $(1) - (2) - (3)$, troviamo

$$3 = 0$$

quindi questo sistema di equazioni non ha soluzioni, e di conseguenza, il sistema non ammette nessun punto fisso.

2 - Definiamo

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi se $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$, il sistema diventa

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + b$$

dove $b := (1, 0, -2)$. Il polinomio caratteristico di A è

$$-(1-X)^2(1+X) + 1 + 5X = -X(X-3)(X+2)$$

quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda_+ := 3,\ \lambda_- := -2,\ \lambda_0 := 0.$$

Gli autovettori di A sono

$$\eta_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} u, \qquad \eta_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} u, \qquad \eta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} u$$

quindi se

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

allora

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$P^{-1}b = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 16 & 2 & 8 \\ 9 & 3 & -3 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi se $(y_1, y_2, y_3) := P^{-1}\mathbf{x}$, allora

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 \\ \dot{y}_2 = -2y_2 + \frac{1}{2} \\ \dot{y}_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e quindi

$$y_1(t) = e^{3t} y_1(0), \qquad y_2(t) = e^{-2t}\left(y_2(0) - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}, \qquad y_3(t) = \frac{1}{2}t + y_3(0).$$

Inoltre,

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

quindi

$$y_1(t) = \frac{1}{15}e^{3t}, \qquad y_2(t) = -\frac{3}{20}e^{-2t} + \frac{1}{4}, \qquad y_3(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}$$

e

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 4e^{3t} - 9e^{-2t} + 30t + 5 \\ -4e^{3t} - 36e^{-2t} - 120t + 100 \\ 8e^{3t} + 27e^{-2t} - 30t - 35 \end{pmatrix}.$$

<u>Esercizio 3.</u> Si consideri l'oscillatore armonico smorzato e *forzato*:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + f(t)\ ,$$

dove $m, k, \gamma > 0$ e la forza esterna $f(t)$ è $f(t) = F_0 \cos\omega_0 t$. Si supponga per semplicità che $\gamma \neq 2\sqrt{mk}$ (caso non critico).

- Si determini la soluzione generale del sistema, procedendo nel modo seguente: si scriva l'equazione nella forma di un sistema del prim'ordine, si diagonalizzi il sistema e si calcoli la soluzione per il sistema diagonalizzato; quindi si torni alle variabili originali.

- Si riconosca che la soluzione generale si può scrivere come somma di due pezzi, uno che tende a zero nel limite $t \to \infty$, l'altro periodico di periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Si determini esplicitamente la forma di quest'ultimo.

- Si determini la soluzione con un secondo metodo: si noti che la soluzione generale del problema è necessariamente della forma $x(t) = x_{om}(t) + \overline{x}(t)$, dove $x_{om}(t)$ è la soluzione generale del problema omogeneo (i.e., quello con $f(t) = 0$), e $\overline{x}(t)$ è una soluzione particolare del problema non omogeneo assegnato. Il pezzo $x_{om}(t)$ è lo stesso trovato a lezione nel caso non omogeneo, mentre $\overline{x}(t)$ si può determinare cercandolo nella forma $Ae^{i\omega_0 t} + c.c.$, con A una costante complessa da determinare (per sostituzione nell'equazione).

- Si calcoli la potenza media P fornita dalla forza esterna all'oscillatore nel limite di tempi lunghi, i.e.,
$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\frac{d}{dt}\overline{x}(t)dt$$
Si discuta la dipendenza di P da ω_0: si disegni il grafico di $P(\omega_0)$ e in particolare si determini il valore di ω_0 a cui P assume il massimo (condizione di *risonanza*).

Soluzione:

1 - Definiamo $\mathbf{x} := (x, \dot{x})$, $\omega := \sqrt{k/m}$, $\eta := \gamma/(2m)$, $\mathbf{b} := (0, f(t)/m) = (0, A_0\cos\omega_0 t) =: (0, b(t))$, con $A_0 = F_0/m$ e riscriviamo l'equazione differenziale come
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\eta \end{pmatrix}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$
Definiamo
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\eta \end{pmatrix} =: A.$$
Gli autovalori di A sono
$$\lambda_\pm := -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega^2} =: -\eta \pm i\bar{\omega}$$
e gli autovettori di A sono
$$\xi_\pm := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix} u$$
quindi, dato che $\eta \neq \omega$, definiamo
$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\eta + i\bar{\omega} & -\eta - i\bar{\omega} \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2i\bar{\omega}}\begin{pmatrix} \eta + i\bar{\omega} & 1 \\ -\eta + i\bar{\omega} & -1 \end{pmatrix}$$
e cambiamo variabili passando alle $\mathbf{y} := P^{-1}\mathbf{x}$:
$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} -\eta + i\bar{\omega} & 0 \\ 0 & -\eta - i\bar{\omega} \end{pmatrix}\mathbf{y} + \frac{1}{2i\bar{\omega}}\begin{pmatrix} b(t) \\ -b(t) \end{pmatrix}$$
quindi
$$\mathbf{y}(t) = e^{-\eta t}\begin{pmatrix} e^{i\bar{\omega}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\bar{\omega}t} \end{pmatrix}\left(\mathbf{y}(0) + \frac{1}{2i\bar{\omega}}\int_0^t ds\; e^{\eta s}b(s)\begin{pmatrix} e^{-i\bar{\omega}s} \\ -e^{i\bar{\omega}s} \end{pmatrix}\right)$$

inoltre

$$\int_0^t ds\ e^{(\eta\mp i\bar\omega)s}\cos(\omega_0 s) = \frac{1}{2}\int_0^t ds\ (e^{(\eta\mp i\bar\omega+i\omega_0)s} + e^{(\eta\mp i\bar\omega-i\omega_0)s})$$

$$= e^{(\eta\mp i\bar\omega)t}\frac{(\eta\mp i\bar\omega)(\cos(\omega_0 t) - e^{-(\eta\mp i\bar\omega)t}) + \omega_0\sin(\omega_0 t)}{(\eta\mp i\bar\omega)^2+\omega_0^2}$$

quindi

$$\mathbf{y}(t) = e^{-\eta t}\begin{pmatrix} e^{i\bar\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\bar\omega t}\end{pmatrix}\mathbf{y}(0) + \frac{F_0}{2i\bar\omega m}\begin{pmatrix} \frac{(\eta-i\bar\omega)(\cos(\omega_0 t)-e^{(-\eta+i\bar\omega)t})+\omega_0\sin(\omega_0 t)}{(\eta-i\bar\omega)^2+\omega_0^2} \\ -\frac{(\eta+i\bar\omega)(\cos(\omega_0 t)-e^{(-\eta-i\bar\omega)t})+\omega_0\sin(\omega_0 t)}{(\eta+i\bar\omega)^2+\omega_0^2}\end{pmatrix}.$$

Torniamo ora alle $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$: abbiamo

$$P\begin{pmatrix} e^{i\bar\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\bar\omega t}\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{\bar\omega}\begin{pmatrix} \eta\sin(\bar\omega t)+\bar\omega\cos(\bar\omega t) & \sin(\bar\omega t) \\ -(\eta^2+\bar\omega^2)\sin(\bar\omega t) & -\eta\sin(\bar\omega t)+\bar\omega\cos(\bar\omega t)\end{pmatrix}$$

e se

$$P\frac{1}{2i\bar\omega}\begin{pmatrix} \frac{(\eta-i\bar\omega)(\cos(\omega_0 t)-e^{(-\eta+i\bar\omega)t})+\omega_0\sin(\omega_0 t)}{(\eta-i\bar\omega)^2+\omega_0^2} \\ -\frac{(\eta+i\bar\omega)(\cos(\omega_0 t)-e^{(-\eta-i\bar\omega)t})+\omega_0\sin(\omega_0 t)}{(\eta+i\bar\omega)^2+\omega_0^2}\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}$$

allora

$$\zeta_1 = \frac{\bar\omega(\eta^2-\omega_0^2+\bar\omega^2)(\cos(\omega_0 t) - e^{-\eta t}\cos(\bar\omega t)) + 2\eta\omega_0\bar\omega\sin(\omega_0 t) - e^{-\eta t}\eta(\eta^2+\omega_0^2+\bar\omega^2)\sin(\bar\omega t)}{\bar\omega((\eta^2+\omega_0^2-\bar\omega^2)^2+4\eta^2\bar\omega^2)}$$

quindi la prima componente di $\mathbf{x}(t)$ è

$$x(t) = x_\infty(t) + e^{-\eta t}x_0(t)$$

dove

$$x_\infty(t) = \frac{F_0}{m}\frac{(\eta^2-\omega_0^2+\bar\omega^2)\cos(\omega_0 t)+2\eta\omega_0\sin(\omega_0 t)}{(\eta^2+\omega_0^2-\bar\omega^2)^2+4\eta^2\bar\omega^2}$$

e

$$x_0(t) = \tfrac{1}{\bar\omega}\left(\eta x(0)+\dot x(0) - \tfrac{F_0\eta}{m}\tfrac{\eta^2+\omega_0^2+\bar\omega^2}{(\eta^2+\omega_0^2-\bar\omega^2)^2+4\eta^2\bar\omega^2}\right)\sin(\bar\omega t)$$
$$+\left(x(0) - \tfrac{F_0}{m}\tfrac{\eta^2-\omega_0^2+\bar\omega^2}{(\eta^2+\omega_0^2-\bar\omega^2)^2+4\eta^2\bar\omega^2}\right)\cos(\bar\omega t).$$

Definiamo

$$Z := \sqrt{(\eta^2+\omega_0^2-\bar\omega^2)^2+4\bar\omega^2\eta^2} = \sqrt{(\eta^2-\omega_0^2+\bar\omega^2)^2+4\omega_0^2\eta^2}$$

e ϕ tali che

$$\cos\phi = \frac{\eta^2-\omega_0^2+\bar\omega^2}{Z},\qquad \sin\phi = \frac{2\eta\omega_0}{Z}$$

cosicché

$$x_\infty(t) = \frac{F_0}{mZ}\cos(\omega_0 t - \phi).$$

2 - La soluzione

$$x(t) = x_\infty + e^{-\eta t}x_0(t)$$

è fatta da un pezzo periodico di periodo $2\pi/\omega_0$ e di un pezzo che decade esponenzialmente, anche se $\bar\omega\notin i\mathbb{C}$ (id est se $\eta>\omega$): in questo caso, x_0 cresce come $e^{|\bar\omega|t}$, ma $|\bar\omega| = \sqrt{\eta^2-\omega^2}<\eta$.

3 - Possiamo trovare la soluzione con un altro metodo: scriviamo $x(t) = x_{om}(t) + \bar{x}(t)$ dove

$$m\ddot{x}_{om} = -kx_{om} - \gamma\dot{x}_{om}$$

quindi

$$x_{om}(t) = e^{-\eta t}\left(\alpha\cos(\bar{\omega}t) + \frac{1}{\bar{\omega}}(\eta\alpha + \beta)\sin(\bar{\omega}t)\right)$$

dove α e β sono costanti da stabilire, e

$$\bar{x}(t) = Ae^{i\omega_0 t} + A^* e^{-i\omega_0 t}$$

dove A è scelto in modo tale che $\bar{x}$ sia una soluzione dell'equazione

$$\ddot{\bar{x}} = -\omega^2\bar{x} - 2\eta\dot{\bar{x}} + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)$$

quindi

$$A = -\frac{F_0}{2m((\omega_0^2 - \omega^2) - 2\eta i\omega_0)}.$$

Quindi

$$\bar{x}(t) = \frac{F_0}{m}\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)\cos(\omega_0 t) + 2\eta\omega_0\sin(\omega_0 t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega_0^2}$$

usando $\bar{\omega}^2 = \omega^2 - \eta^2$, troviamo

$$\bar{x}(t) = x_\infty(t).$$

Le costanti α e β sono determinate imponendo i valori di $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

4 - La potenza media per grandi tempi è

$$P = \frac{F_0}{T_0}\int_0^{T_0} dt\ \cos(\omega_0 t)\frac{dx_\infty}{dt} = -\frac{F_0^2\omega_0}{mZT_0}\int_0^{T_0} dt\ \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t - \phi).$$

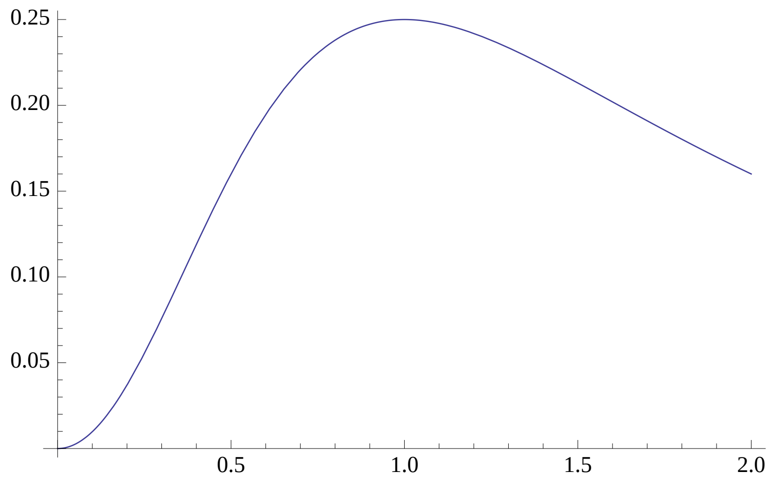
Inoltre

$$\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t - \phi) = \frac{1}{2}(\sin(2\omega_0 t - \phi) - \sin\phi)$$

quindi supponendo che $T_0 \in 2\pi/\omega_0\mathbb{Z}$, troviamo

$$P = \frac{F_0^2\omega_0\sin\phi}{2mZ} = \frac{F_0^2\eta\omega_0^2}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega_0^2)} = \frac{F_0^2\eta}{m\left(4\eta^2 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0}\right)^2\right)}.$$

Quindi $P(\omega_0)$ è massimo quando $|\omega_0^2 - \omega^2|/\omega_0$ è minimo, cioè per $\omega_0 = \omega$, quindi quando il forzamento è *risonante* coll'oscillatore. Il grafico di $P(\omega_0)$ per $F_0 = 1$, $m = 1$, $\eta = 1$, $\omega = 1$ è:



Esercizio 4. Si ripeta l'esercizio precedente nel caso critico $\gamma = 2\sqrt{mk}$. Si verifichi che la soluzione determinata nel caso non critico si riduce a quella critica nel limite $\gamma \to 2\sqrt{mk}$.

Soluzione: Supponiamo che $\eta = \omega$. Facciamo la decomposizione di x in x_{om} e $\bar{x}$. L'espressione di $\bar{x}$ è la stessa che nel caso $\eta \neq \omega$. Quindi facciamo il calcolo di x_{om}.

1 - Definiamo $\mathbf{x} := (x_{om}, \dot{x}_{om})$ e scriviamo l'equazione di x_{om} come

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\omega \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Definiamo

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\omega \end{pmatrix}$$

L'unico autovalore di questa matrice è $\lambda := -\omega$, e il suo autovettore è $\xi := (1, -\omega)$. Riduciamo A alla sua forma normalle di Jordan: risolviamo

$$(A + \omega)(u, v) = (1, -\omega)$$

quindi definiamo $\bar{\xi} := (0, 1)$ e

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$$

tali che

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}.$$

Quindi, se $(y_1, y_2) := P^{-1}\mathbf{x}$ allora

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\omega y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega y_2 \end{cases}$$

e quindi

$$y_2(t) = e^{-\omega t} y_2(0)$$

e

$$\dot{y}_1 = -\omega y_1 + e^{-\omega t} y_2(0)$$

di conseguenza

$$y_1(t) = e^{-\omega t}(y_1(0) + t y_2(0))$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\omega t} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{x}(0) = e^{-\omega t} \begin{pmatrix} 1 + \omega t & t \\ -\omega^2 t & 1 - \omega t \end{pmatrix} \mathbf{x}(0)$$

e quindi

$$x_{om}(t) = e^{-\omega t}((1 + \omega t)\alpha + t\beta)$$

dove α e β sono costanti determinati dalle condizioni iniziali.

2 - Ricordiamo

$$x_{om}(t) = e^{-\eta t}\left(\alpha\cos(\bar{\omega}t) + \frac{1}{\bar{\omega}}(\eta\alpha + \beta)\sin(\bar{\omega}t)\right).$$

Prendiamo il limite $\eta \to \omega$ che corrisponde a prendere $\bar{\omega} \to 0$ e troviamo

$$\lim_{\eta \to \omega} x_{om}(t) = e^{-\omega t}(\alpha + (\omega\alpha + \beta)t)$$

quindi ritroviamo il x_{om} che avevamo calcolato nel caso $\omega = \eta$.