Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO 2 (11-10-2013)

<u>ESERCIZIO 1.</u> Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale per un punto materiale di massa $m = 1$, descritto dalle equazioni del moto

$$\ddot{x} = -U'(x) \ ,$$

con $U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ (potenziale a doppia buca).

- Si risolva esplicitamente il moto corrispondente al dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (\sqrt{2}, 0)$.
- Si denoti con T il periodo di un moto generico a energia negativa. Si calcoli il limite di T nel limite di piccole oscillazioni, i.e., nel limite in cui l'ampiezza delle oscillazioni tende a 0.

Soluzione:

1 - Abbiamo

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = cost$$

quindi se $(x(0), \dot{x}(0)) = (\sqrt{2}, 0)$ allora $E = 0$, quindi il moto si svolgerà sulla separatrice. Inoltre, $-\partial U(x(0)) = 2(1 - \sqrt{2}) < 0$, quindi usando $\ddot{x} = -\partial U(x)$, troviamo che $\dot{x}(0^+) < 0$, e quindi

$$\dot{x} = -\sqrt{2(E - U(x))} = -\sqrt{-2U(x)}$$

quindi

$$t = \int_0^t ds = \int_{x(0)}^{x(t)} dx \ \frac{1}{\dot{x}} = -\int_{\sqrt{2}}^{x(t)} dx \ \frac{1}{\sqrt{-2U(x)}} = -\int_{\sqrt{2}}^{x(t)} dx \ \frac{1}{\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{2}}}$$

e usando che $x \geqslant 0$,

$$t = -\int_{x(0)}^{x(t)} dx \ \frac{1}{x\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}$$

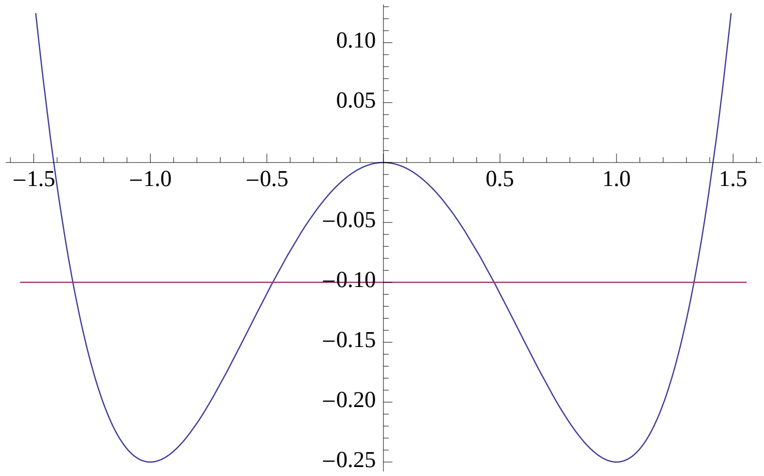
Cambiamo variabili passando a $u := \sqrt{1 - x^2/2}$:

$$t = \int_0^{\sqrt{1-\frac{x(t)^2}{2}}} du \ \frac{1}{(1 - u^2)} = \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1 - \frac{x(t)^2}{2}}\right)$$

quindi

$$x(t) = \sqrt{2(1 - \tanh(t)^2)} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh(t)}.$$

2 - Prendiamo $1/4 < E < 0$:



Le intersezioni di $U(x)$ con E sono

$$\pm x_1 := \pm\sqrt{1-\sqrt{1+4E}}, \qquad \pm x_2 := \pm\sqrt{1+\sqrt{1+4E}}.$$

Usando $U(x) \leqslant E$ (poichè $\dot{x}^2 = 2(E-U(x))$), troviamo che il moto si svolge in

$$I_+ := [x_1, x_2], \text{ o in } I_- := [-x_2, -x_1].$$

Inoltre, il sistema muove dal punto x_1 al punto x_2 con una velocità positiva nell'tempo

$$\tau(x_1,x_2) := \int_0^{\tau(x_1,x_2)} dt = \int_{x_1}^{x_2} dx\ \frac{1}{\dot{x}} = \int_{x_1}^{x_2} dx\ \frac{1}{\sqrt{2(E-U(x))}}$$

quindi il periodo del moto è

$$T = 2\tau(x_1,x_2) = \sqrt{2}\int_{x_1}^{x_2} dx\ \frac{1}{\sqrt{E-U(x)}}.$$

Cambiamo variabili passando a $u := (x-x_1)/(x_2-x_1)$:

$$T = 2\tau(x_1,x_2) = \sqrt{2}(x_2-x_1)\int_0^1 du\ \frac{1}{\sqrt{E-U(x_1+(x_2-x_1)u)}}.$$

Consideriamo il limite delle piccole oscillazioni: prendiamo $E = -1/4+\epsilon^2$ con ϵ piccolo. Abbiamo

$$x_1 = 1-\epsilon+O(\epsilon^2), \qquad x_2 = 1+\epsilon+O(\epsilon^2)$$

quindi

$$U(x_1+(x_2-x_1)u) = U(1+\epsilon(2u-1)+O(\epsilon^2))$$

quindi usando

$$U(1+t) = -\frac{1}{4}+t^2+O(t^3)$$

troviamo

$$U(x_1+(x_2-x_1)u) = -\frac{1}{4}+\epsilon^2(2u-1)^2+O(\epsilon^3)$$

quindi

$$T = 2\sqrt{2}\epsilon\int_0^1 du\ \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2(1-(2u-1)^2)+O(\epsilon^3)}} = \sqrt{2}\int_0^1 du\ \frac{1}{\sqrt{u(1-u)+O(\epsilon)}}.$$

Nel limite $\epsilon \to 0$ troviamo (usando il teorema di convergenza dominata, o stimando esplicitamente la differenza tra la funzione integranda e il suo limite puntuale, come fatto in classe per il pendolo):

$$\lim_{\epsilon\to 0} T = \sqrt{2}\int_0^1 du\, \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}$$

Cambiamo variabili passando a $v := \sqrt{u}$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} T = 2\sqrt{2}\int_0^1 dv\, \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 2\sqrt{2}(\arcsin(1) - \arcsin(0)) = \pi\sqrt{2}.$$

Quindi il periodo rimane ben definito nel limite.

ESERCIZIO 2. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = x^2 - x$$

- Si determini una grandezza conservata del moto
- Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi
- Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti e a moti chiusi aperiodici
- Si calcoli il periodo dei moti periodici nella forma di un integrale definito
- Si calcoli il limite di tale periodo nel limite di piccole oscillazioni, i.e., nel limite in cui l'ampiezza delle oscillazioni tende a 0.
- Si consideri un dato iniziale corrispondente a un moto aperto e si stabilisca se il tempo perché il punto raggiunga l'infinito è finito o no. Si stabilisca quindi se il moto esiste globalmente o no.
- Si risolva esplicitamente il moto sulla separatrice, per un dato iniziale scelto a piacere sulla curva critica.

Soluzione:

1 - L'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

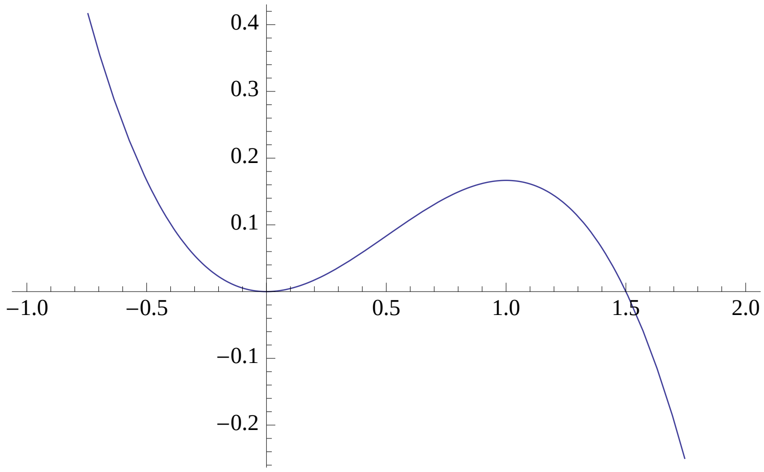
è conservata:

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + x - x^2) = 0.$$

2 - Le curve di livello per una energia E fissata sono determinate da

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - U(x))} = \pm\sqrt{2\left(E - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)}.$$

Il grafico di $U(x)$ è



$U(x)$ ha un minimo in 0 e un massimo in 1, e $U(0) = 0$, $U(1) = 1/6$, $\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = \pm\infty$; inoltre U decresce in $(-\infty, 0)$, cresce in $(0, 1)$ e decresce in $(1, \infty)$. Quindi

- se $E < 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \geqslant x_E$ dove x_E è l'unica soluzione di $U(x_E) = E$, e $\dot{x}(x_E) = 0$, e
$$\frac{d}{dx}\dot{x}\bigg|_{x=x_E+\epsilon} = -\frac{U'(x_E+\epsilon)}{2\sqrt{2(E-U(x_E+\epsilon))}}$$
con $U'(x_E) \neq 0$ quindi $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$ (dove il $'$ significa una derivata rispetto a x). Inoltre $\dot{x} \to \pm\infty$ quando $x \to \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.

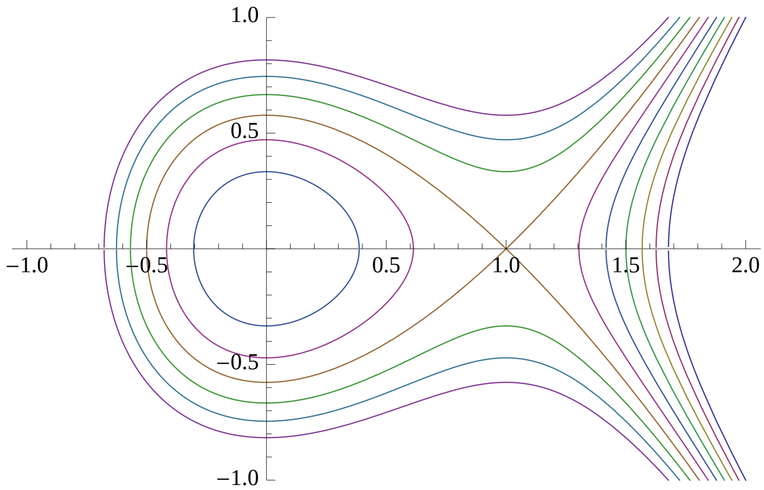
- se $0 < E < 1/6$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)}]$ e per $x \geqslant x_E$ dove $x_E^{(\pm)}$ e x_E sono le tre soluzioni di $U(x_E^{(\pm)}) = E$. Abbiamo $\dot{x}'(x_E^{(\pm)}) = \pm\infty$, $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x} \to \pm\infty$ quando $x \to \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.

- se $E > 1/6$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \geqslant x_E$ dove x_E è l'unica soluzione di $U(x_E) = E$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x} \sim x^{3/2}$ quando $x \to \infty$.

- se $E = 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x = 0$, nel qual caso $\dot{x}(x) = \dot{x}(0) = 0$, e per $x \geqslant x_0$ dove x_0 è la seconda soluzione $U(x_0) = 0$, nel qual caso la traiettoria ha le stesse proprietà qualitative di quelle aperte a energia negativa.

- se $E = 1/6$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \in [x_E^{(-)}, 1]$ e per $x \in [1, \infty)$ dove $x_E^{(-)}$ è la prima delle due soluzioni di $U(x_E^{(-)}) = E$, $\dot{x}'(x_E^{(-)}) = \pm\infty$ e $\dot{x}'(1) = \pm 1$. Inoltre $\dot{x} \sim x^{3/2}$ quando $x \to \infty$.

Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate nel seguente grafico:



Tutte le curve sono $\mathcal{C}^2$ eccetto la curva gialla che ha una discontinuità nella derivata. Questa curva si chiama la *separatrice.*

3 - Usando il ragionamento della domanda precedente, troviamo che

- se $x(0) \geqslant x_E$ dove x_E è la piu grande delle soluzioni di $U(x_E) = E$, e $E \neq 1/6$, allora il moto è aperto.
- se $0 < E < 1/6$ e $x(0) \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)}]$ dove $x_E^{(\pm)}$ sono le due soluzioni piu piccoli di $U(x_E^{(\pm)}) = E$, allora $U'(x_E^{(\pm)}) \neq 0$ quindi il moto è chiuso e periodico.
- se $E = 0$ e $x(0) = 0$, il moto è costante, quindi chiuso e periodico.
- se $E = 1/6$ e $x(0) > 1$, allora il moto è aperto
- se $E = 1/6$ e $x(0) < 1$, allora il moto è chiuso, e come $U'(1) = 0$, sara aperiodico.

4 - Prendiamo $E \in (0, 1/6)$ e $x(0) \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)}]$ dove $x_E^{(\pm)}$ sono le due soluzioni piú piccole di $U(x_E^{(\pm)}) = E$. Il tempo per arrivare da $x_E^{(-)}$ fino ad $x_E^{(+)}$ è

$$\tau(x_E^{(-)}, x_E^{(+)}) = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} dx \, \frac{1}{\sqrt{2\left(E + x^2\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\right)}}$$

quindi il periodo del moto è

$$T = \sqrt{2} \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} dx \, \frac{1}{\sqrt{E + x^2\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)}}.$$

5 - Consideriamo il limite delle piccole oscillazioni: prendiamo $E = \epsilon^2$ per ϵ piccolo. Cambiamo variabili passando a $u := x_E^{(-)} + (x_E^{(+)} - x_E^{(-)})u$:

$$T = \sqrt{2}(x_E^{(+)} - x_E^{(-)}) \int_0^1 du \, \frac{1}{\sqrt{E - U\left(x_E^{(-)} + (x_E^{(+)} - x_E^{(-)})u\right)}}$$

Abbiamo

$$x_E^{(\pm)} = \pm\frac{\epsilon}{\sqrt{2}} + O(\epsilon^2)$$

e

$$U(x) = \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

quindi

$$T = 2\epsilon \int_0^1 du \, \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2\left(\frac{3}{4} + u - u^2\right) + O(\epsilon^3)}} = 2\int_0^1 du \, \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} + u - u^2}} + O(\epsilon)$$

quindi

$$T = 2\int_0^1 du \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} - u}\sqrt{\frac{1}{2} + u}} + O(\epsilon)$$

cambiamo variabili passando a $v := \sqrt{3/2 - u}/\sqrt{2}$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} T = 4\int_0^1 dv \, \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = 2\pi.$$

La stima degli errori e la possibilità di scambiare limite e integrale si dimostrano procedendo come nel caso del pendolo discusso in classe.

6 - Prendiamo $x(0) > x_E$ dove x_E è la piú grande delle soluzioni di $U(x_E) = E$. Il tempo per andare all'infinito è

$$\tau(x(0), \infty) = \int_{x(0)}^{\infty} dx \; \frac{1}{\sqrt{2\left(E + x^2\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\right)}}$$

e verifichiamo che $\tau(x(0), \infty)$ è finito. Quindi dobbiamo studiare il comportamento dell'integrale all'infinito. Abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{2\left(E + x^2\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\right)}} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2}} x^{-3/2}$$

quindi l'integrale converge all'infinito, e quindi $\tau(x(0), \infty) < \infty$. Quindi il moto esiste solamente per $t \in [0, \tau(x(0), \infty)]$ e quindi non esiste globalmente.

7- Prendiamo $E = 1/6$ e un dato iniziale $x(0) \geqslant x_E$ dove x_E è la piú piccola delle due soluzioni di $U(x_E) = E$ quindi $x_E = -1/2$. Chiamiamo σ il segno di $\dot{x}(0)$. Abbiamo

$$t = \sigma \int_{x(0)}^{x(t)} dx \; \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)}} = \sigma\sqrt{3} \int_{x(0)}^{x(t)} dx \; \frac{1}{|x-1|\sqrt{1+2x}}.$$

Cambiamo variabili a $u := \sqrt{1+2x}/\sqrt{3}$:

$$t = 2\sigma \int_{\frac{\sqrt{1+2x(0)}}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{1+2x(t)}}{\sqrt{3}}} du \; \frac{1}{|1-u^2|}$$

quindi, se $x(0) < 1$ e $\sigma = +$ o se $x(0) > 1$ e $\sigma = -$, allora

$$t = 2 \int_{\frac{\sqrt{1+2x(0)}}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{1+2x(t)}}{\sqrt{3}}} du \; \frac{1}{1-u^2} = 2\text{arctanh}\left(\frac{\sqrt{1+2x(t)}}{\sqrt{3}}\right) - 2\text{arctanh}\left(\frac{\sqrt{1+2x(0)}}{\sqrt{3}}\right)$$

quindi se $x(0) = -1/2$

$$t = 2\text{arctanh}\left(\frac{\sqrt{1+2x(t)}}{\sqrt{3}}\right)$$

e

$$x(t) = \frac{3\tanh(t/2)^2 - 1}{2}.$$

<u>Esercizio 3.</u> Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = \frac{12}{x^{13}} - \frac{6}{x^7}$$

- Si determini una grandezza conservata del moto
- Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi
- Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici e a moti aperti
- Si calcoli il limite di tale periodo nel limite di piccole oscillazioni, i.e., nel limite in cui l'ampiezza delle oscillazioni tende a 0.

Soluzione:

1 - L'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}$$

è conservata:

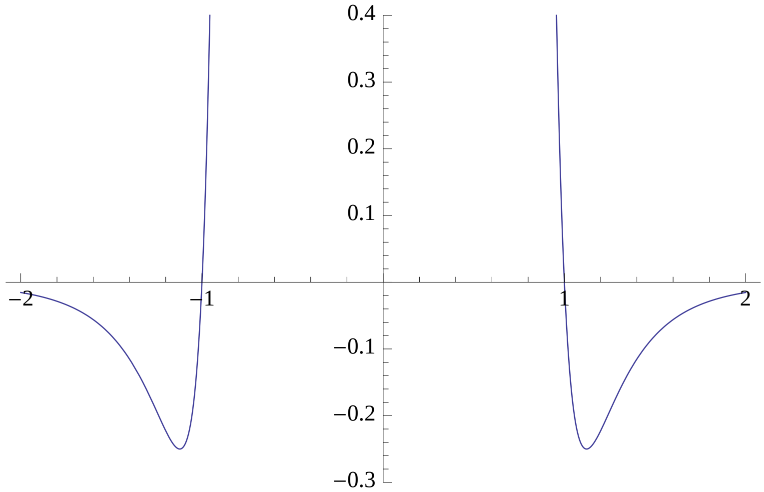
$$\dot{E} = \dot{x}\left(\ddot{x} - \frac{12}{x^{13}} + \frac{6}{x^7}\right) = 0.$$

Questa energia potenziale si chiama il *potenziale di Lennard-Jones*.

2 - Le curve di livello per una energia E fissata sono determinate da

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - U(x))} = \pm\sqrt{2\left(E - \frac{1}{x^{12}} + \frac{1}{x^6}\right)}.$$

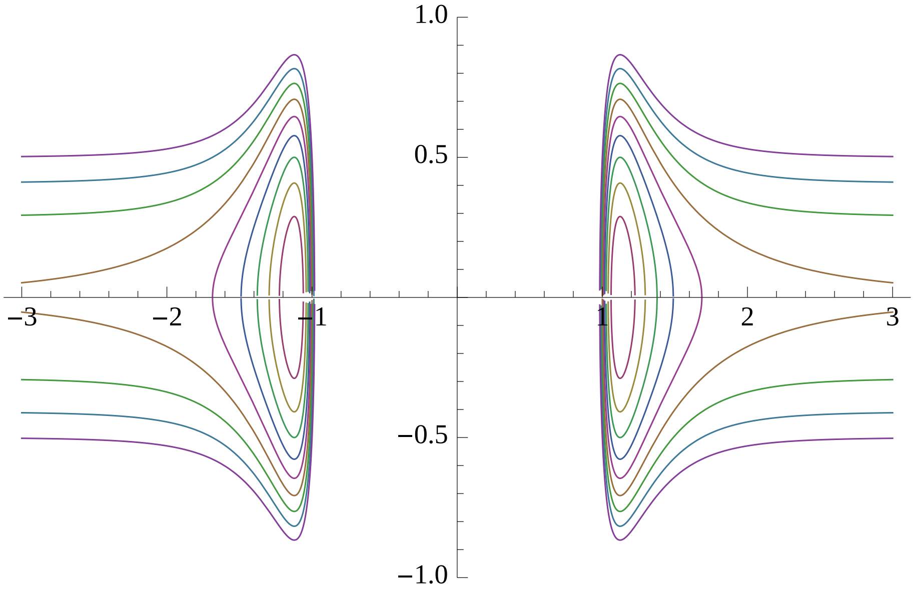
Il grafico di $U(x)$ è



$U(x)$ ha un minimo in $x_\pm := \pm 2^{1/6}$, $U(x_\pm) = -1/4$, $\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} U(x) = \infty$; inoltre U decresce in $(-\infty, x_-)$, cresce in $(x_-, 0)$, decresce in $(0, x_-)$ e cresce in (x_-, ∞). Quindi

- se $E < -1/4$ allora $\dot{x}(x)$ non è definito.
- se $-1/4 < E < 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)}]$ e per $x \in [-x_E^{(+)}, -x_E^{(-)}]$ dove $\pm x_E^{(\pm)}$ sono le quattro soluzioni di $U(\pm x_E^{(\pm)}) = E$. Poichè $U'(\pm x_E^{(\pm)}) \neq 0$, abbiamo $\dot{x}'(\pm x_E^{(\pm)}) = \pm\infty$.
- se $E > 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \geqslant x_E$ e per $x \leqslant -x_E$ dove $\pm x_E$ sono le due soluzioni di $U(\pm x_E) = E$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x} \to \pm 1/\sqrt{2E}$ quando $x \to \pm\infty$.
- se $E = 1/4$, $\dot{x}(x)$ è definito solamente per $x = \pm 2^{1/6}$, quindi $\dot{x}(x) = \dot{x}(\pm 2^{1/6}) = 0$.
- se $E = 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \in [x_E, \infty)$ e per $x \in (-\infty, -x_E]$ dove $\pm x_E$ sono le due soluzioni di $U(\pm x_E) = E$, $\dot{x}'(\pm x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x} \sim x^{-3}$ quando $x \to \pm\infty$.

Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate nel seguente grafico:



Le curva gialla si chiama la *separatrice*.

3 - Usando il ragionamento della domanda precedente, troviamo che

- se $-1/4 < E < 0$ il moto è periodico.
- se $E > 0$ il moto è aperto, e tende a un moto *ballistico* dove la velocita è costante.
- se $E = -1/4$, il moto è costante.
- se $E = 0$ è aperto, ma la velocità decade come x^{-3}.

4 - Consideriamo il limite delle piccole oscillazioni: prendiamo $E = -1/4 + \epsilon^2$ per ϵ piccolo. Il periodo del moto è

$$T = \sqrt{2} \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} dx \, \frac{1}{\sqrt{E + x^2 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)}}$$

dove $\pm x_E^{(\pm)}$ sono le quattro soluzioni di $U(\pm x_E^{(\pm)}) = E$. Cambiamo variabili passando a $u := x_E^{(-)} + (x_E^{(+)} - x_E^{(-)})u$:

$$T = \sqrt{2}(x_E^{(+)} - x_E^{(-)}) \int_0^1 du \, \frac{1}{\sqrt{E - U\left(x_E^{(-)} + (x_E^{(+)} - x_E^{(-)})u\right)}}$$

Abbiamo

$$\frac{1}{(x_E^{(\pm)})^6} = \frac{1}{2} \pm \epsilon$$

quindi

$$x_E^{(\pm)} = 2^{1/6}\left(1 \mp \frac{\epsilon}{3}\right) + O(\epsilon^2)$$

e

$$U(2^{1/6}(1+t)) = -\frac{1}{4} + 9t^2 + O(t^3)$$

quindi

$$T = 2^{5/3}\epsilon \int_0^1 du \, \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 4u(1-u) + O(\epsilon^3)}} = 2^{2/3} \int_0^1 du \, \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} + O(\epsilon)$$

cambiamo variabili passando a $v := \sqrt{u}$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} T = 2^{5/3} \int_0^1 dv \ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 2^{2/3}\pi.$$

<u>ESERCIZIO 4.</u> Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove sulla retta $\mathbb{R}$ sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = x + 2\sin x.$$

Dopo aver scritto l'equazione del moto e aver determinato un integrale primo:

- si disegni il grafico dell'energia potenziale,
- si determinino i punti di equilibrio del sistema
- si disegnino le curve di livello nel piano $(x, \dot{x})$
- si identifichino i dati iniziali che producono: (i) moti non limitati, (ii) moti limitati. In quest'ultimo caso si discuta quando il moto è periodico o aperiodico.

Soluzione: L'equazione del moto è

$$\ddot{x} = -V'(x) = -1 - 2\cos x$$

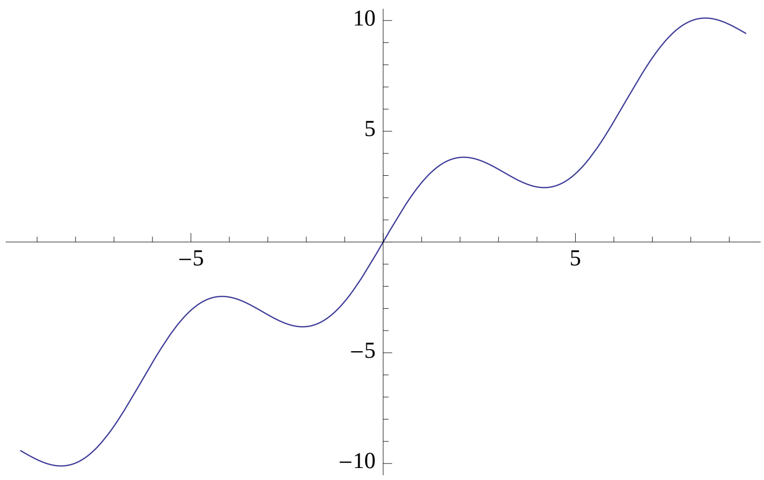
L'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$$

è un integrale primo:

$$\dot{E} = \dot{x}\,(\ddot{x} + 1 + 2\cos x) = 0.$$

1 - Il grafico dell'energia potenziale è:



2 - I punti critici dell'energia potenziale (i.e. gli x tali che $U'(x) = 0$) sono

$$a_k := \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ \ b_k := -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Gli a_k sono massimi e gli b_k sono minimi. Inoltre, abbiamo

$$V(a_k) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \sqrt{3}, \qquad V(b_k) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3}$$

quindi $V(b_{k+1}) > V(x_{k-1})$ (perchè $4\pi/3 > 4 > 2 > \sqrt{3}$).

3 - Le curve di livello per una energia E fissata sono determinate da

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - V(x))} = \pm\sqrt{2\,(E - x - 2\sin x)}.$$

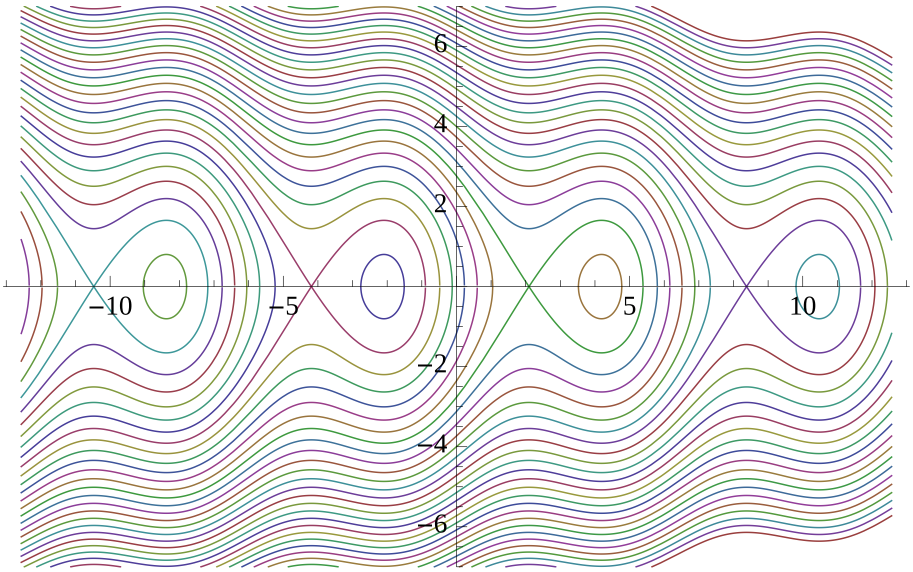
- Se $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$, $V(x) = E$ ha 3 soluzioni: $x_E < x_E^{(-)} < x_E^{(+)}$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leqslant x_E$ e per $x \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)}]$. Come $V'(x_E^{(\pm)}) \neq 0$ e $V'(x_E) \neq 0$, $\dot{x}'(x_E^{(\pm)}) = \pm\infty$ e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.

- Se $E \in (V(a_{k-1}), V(b_{k+1}))$, $V(x) = E$ ha una soluzione: x_E, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leqslant x_E$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.

- Se $E = V(b_k)$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x = b_k$ e per $x \leqslant x_E$ dove x_E è la soluzione di $V(x_E) = E$ diversa da b_k. $\dot{x}(b_k) = 0$, $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$ e $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$

- Se $E = V(a_k)$, $V(x) = E$ ha due soluzioni: $a_k < x_E$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leqslant a_k$ e per $x \in [a_k, x_E]$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$, $\dot{x}'(a_k) = \pm 3^{1/4}/2$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.

Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate nel seguente grafico:



4 - Usando il ragionamento della domanda precedente, troviamo che

- se $x(0) \leqslant x_E$ dove x_E è la piu piccola delle soluzioni di $V(x_E) = E$ e se $E \neq V(a_k)$ allora il moto non è limitato.

- se $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$ e $x(0) \in (b_{k+1}, a_k)$ allora il moto è limitato e periodico.

- se $E = V(b_k)$ e $x(0) = b_k$ allora il moto è costante.

- se $E = V(a_k)$ e $x(0) > a_k$ allora il moto è limitato e aperiodico.