Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO 3 (18-10-2013)

ESERCIZIO 1. Si consideri il pendolo con attrito:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta - \gamma\dot{\theta}\ .$$

Si dimostri che $\theta = \pi$ è instabile, anche nel caso in cui $\gamma > 0$.

Soluzione: Ricordiamo la definizione dell'instabilità secondo Lyapunov: $\exists\epsilon > 0$ tali che $\forall\delta > 0$ esiste una scelta $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ di dati iniziali soddisfando $\|(\theta_0-\pi, \dot{\theta}_0)\| \leqslant \delta$ e $\exists t \geqslant 0$ tali che $|\theta(t)-\pi| \geqslant \epsilon$. Ricordiamo anche che, come dimostrato a lezione, per ogni $\gamma > 0$, se prendiamo un dato iniziale con energia $H(\theta_0, \dot{\theta}_0)\dot{\theta}_0^2/2+\omega^2(1-\cos\theta_0) = E_0 < 2\omega^2$ (cioè al di sotto della separatrice) il moto corrispondente è tale che $E(t) = H(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \to 0$ per $t \to \infty$, e corrispondentemente $\theta(t) \to 0$, $\dot{\theta}(t) \to 0$.

Fissiamo allora $\varepsilon = \pi/4$ (ad es.), e preso comunque $\delta > 0$ abbastanza piccolo, consideriamo il dato iniziale $\theta_0 = \pi - \delta$, $\dot{\theta} = 0$, che è vicino entro δ a $(\pi, 0)$ e corrisponde a energia $E_0 = \omega^2(1 + \cos\delta) < 2\omega^2$. Per quanto mostrato a lezione e richiamato sopra, $(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \to 0$ per $t \to \infty$, e quindi, per definizione di limite, esiste $T > 0$ t.c., $\forall t \geq T$, $||(\theta(t), \dot{\theta}(t))|| \leq \pi/4$. In particolare, per $t \geq T$, il punto è al di fuori dell'ϵ-intorno di $(\pi, 0)$, e la condizione di instabilità rimane cosí dimostrata.

ESERCIZIO 2. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = 2\alpha x(x^2 + 1)^{\alpha-1}\ ,$$

con $\alpha > 0$.

- Si determini una grandezza conservata del moto.
- Si disegnino le traiettorie del sistema nel piano delle fasi e si scriva la soluzione per quadrature.
- Si stabilisca se, al variare di $\alpha > 0$, il moto esiste globalmente o no.

Soluzione:

1 - Definiamo l'energia potenziale

$$U(x) := -(x^2 + 1)^\alpha$$

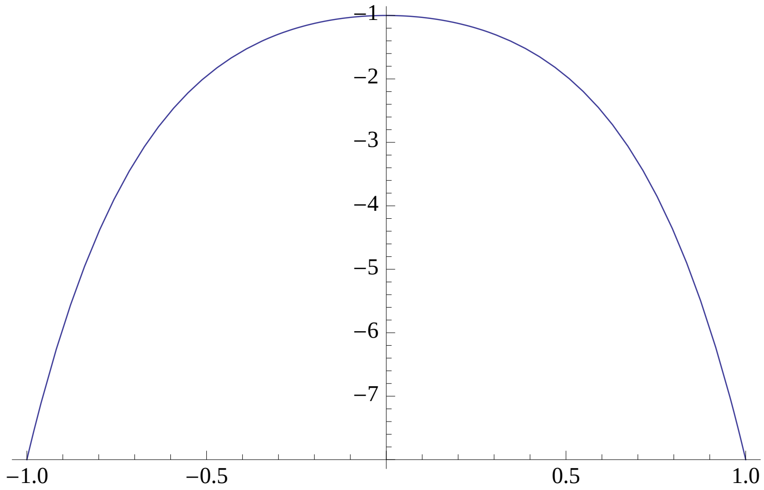
e l'energia

$$E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x).$$

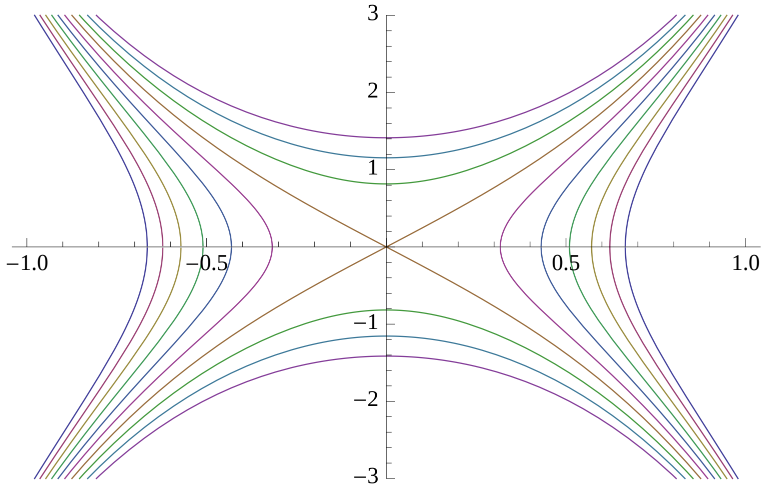
Abbiamo

$$\dot{E} = \dot{x}\left(\ddot{x} - 2\alpha x(x^1 + 1)^{\alpha-1}\right) = 0.$$

2 - Il grafico dell'energia potenziale avra la seguente forma (in figura è rappresentato il caso $\alpha = 3$, ma per diversi valori di α il grafico ha lo stesso comportamento qualitativo):



quindi le curve di livello nello spazio delle fase sono dalla forma:



Inoltre, dato un'energia E, il tempo necessario per andare da x_0 a x_1 su una porzione di curva di livello sul semipiano superiore (una formula analoga, a meno del segno, è valida per le porzioni di curva nel semipiano inferiore) è

$$\tau(x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} dx \, \frac{1}{\sqrt{2(E + (x^2+1)^\alpha)}}.$$

3 - Il tempo per arivare ad $x = \infty$ è

$$\tau_\infty(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} dx \, \frac{1}{\sqrt{2(E + (x^2+1)^\alpha)}}.$$

e

$$E + (x^2+1)^\alpha \underset{x\to\infty}{\sim} x^{2\alpha}$$

quindi $\tau_\infty(x_0)$ è finito se e solo se $\alpha > 1$. Quindi il moto esiste globalmente se e solo se $\alpha \leqslant 1$.

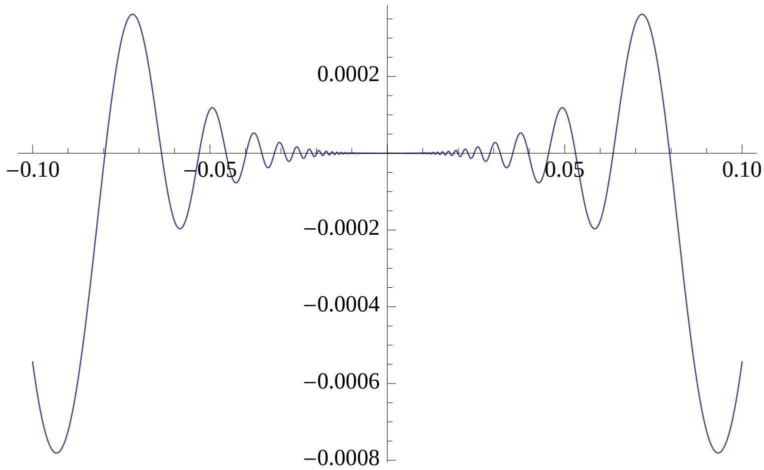
<u>Esercizio 3.</u> Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = -U'(x)\,, \qquad U(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- Si disegni il grafico di $U(x)$.
- Si disegnino le traiettorie del sistema nel piano delle fasi.
- Si dimostri che il punto di equilibrio $x = 0$ è stabile, pur non essendo un minimo isolato locale di U.

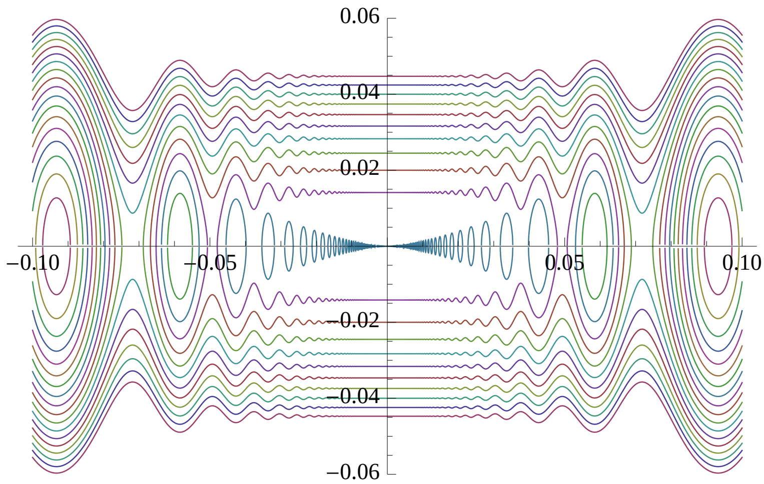
Soluzione:

1 - Il grafico di $U(x)$ è



Le oscillazioni (e quindi i punti di equilibrio) si accumulano a 0.

2 - Quindi le traiettorie nel piano delle fasi sono dalla forma



3 - Ricordiamo la definizione della stabilità secondo Lyapunov: per ogni intorno I del punto di equilibrio sul piano delle fasi, trovo un intorno $I' \subset I$ tale che, scelto un qualsiasi dato iniziale in I', il moto corrispondente rimane in I per tutti i tempi $t \geq 0$. Dallo studio delle curve di livello, risulta che esistono curve di livello concentriche attorno all'origine piccole a piacere. Piú precisamente, scelta un'energia non critica positiva, la Σ_E corrispondente è costituita da varie componenti sconnesse, una sola delle quali contiene (strettamente) l'origine: chiamiamo questa $\tilde{\Sigma}_E$. Per $E < E'$ entrambe non critiche, $\tilde{\Sigma}_E$ è completamente contenuta in $\tilde{\Sigma}_{E'}$. Inoltre l'intera curva chiusa $\tilde{\Sigma}_E$ tende a zero nel limite $E \to 0^+$. La dimostrazione dettagliata di queste affermazioni viene lasciata al lettore, e segue dallo studio del grafico di Σ_E.

Dato I intorno di $(0, 0)$ scegliamo allora I' come l'interno di una di queste $\tilde{\Sigma}_E$, con E cosí piccolo che I' sia contenuto in I. Per quanto discusso sopra questo è possibile. Essendo I' cosí scelto invariante lungo il moto, (i.e. $(x(t), \dot{x}(t))$ rimane in I' per tutti i tempi, se parte in I'), segue la stabilità dell'origine.

Esercizio 4. Si consideri l'equazione sul cerchio:

$$\dot{\theta} = 1 - \cos\theta\ .$$

Si dimostri che $\theta = 0$ è un punto di equilibrio instabile ma attrattivo.

Soluzione: Ricordiamo la definizione dell'instabilità secondo Lyapunov: $\exists\epsilon > 0$ tale che $\forall\delta > 0$ esiste una scelta θ_0 del dato iniziale che soddisfa $|\theta_0| \leqslant \delta$ e $\exists t \geqslant 0$ tale che $|\theta(t)| \geqslant \epsilon$. Prendiamo un dato iniziale $\theta_0 > 0$. Per ogni $\theta_1 \in (\theta_0, 2\pi)$, il tempo per arrivare a θ_1 è

$$\tau(\theta_0, \theta_1) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta\, \frac{1}{1 - \cos\theta} < \infty$$

quindi 0 è instabile. Il punto 0 è attrattivo poichè

$$\tau(\theta_0, 2\pi) = \int_{\theta_0}^{2\pi} d\theta\, \frac{1}{1 - \cos\theta} = \int_{\theta_0 - 2\pi}^{0} d\theta\, \frac{1}{1 - \cos\theta} = \infty$$

poichè

$$1 - \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta)^4.$$

Commento: In questo caso, il moto si può risolvere esplicitamente: facciamo il cambiamento di variabili $\alpha := \theta/2 + \pi/2$:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta\, \frac{1}{1 - \cos\theta} = \int_{\theta_0/2+\pi/2}^{\theta_1/2+\pi/2} d\alpha\, \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \tan\left(\frac{\theta_1 + \pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\theta_0 + \pi}{2}\right)$$

quindi

$$\theta(t) = 2\arctan\left(t - \tan\left(\frac{\theta_0 + \pi}{2}\right)\right) - \pi,$$

da cui risulta evidente, ad es., che $\theta(t) \to 2\pi$, per $t \to \infty$ e per ogni dato iniziale in $(0, 2\pi)$.

Esercizio 5. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}^2$,

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} U(\mathbf{x})\ , \qquad U(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x}|^4\ .$$

Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità. In particolare, si dimostri esplicitamente che $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è stabile, mentre gli altri punti di equilibrio sono instabili.

Soluzione: I punti di equilibrio del sistema sono le soluzioni di

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

e se $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ allora

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \big(2x_1 - 4x_1(x_1^2 + x_2^2),\ 2x_2 - 4x_2(x_1^2 + x_2^2)\big)$$

quindi i punti di equlibrio sono $(0, 0)$ e i punti del cerchio di centro $(0, 0)$ e di raggio $1/\sqrt{2}$.

1 - Dimostriamo che $(0,0)$ è stabile. Data un'energia $E := \dot{\mathbf{x}}^2/2 + U(\mathbf{x})$ positiva e abbastanza piccola, le soluzioni di

$$U(\mathbf{x}) = E$$

sono $|\mathbf{x}| = r_1 = r_1(E)$ e $|\mathbf{x}| = r_2 = r_2(E)$, con $r_{1,2}$ le due radici positive di $r^2 - r^4 = E$, i.e.,

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - E}}\,, \qquad r_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - E}}\,.$$

Quindi $U(\mathbf{x}) \leq E$ corrisponde all'unione delle due regioni disconnesse $|\mathbf{x}| \leq r_1(E)$ e $|\mathbf{x}| \geq r_2(E)$. Quindi, scegliendo il dato iniziale $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ con energia $E = \varepsilon^2/4$ e $|\mathbf{x}_0| \leq r_1(E)$, $\mathbf{x}(t)$ rimane vicino all'origine per tutti i tempi, $|\mathbf{x}(t)| \leq r_1(E)$. Di conseguenza $U(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ e $\dot{\mathbf{x}}^2/2 \leq E$. In conclusione: $|\dot{\mathbf{x}}(t)| \leq \sqrt{2E}$ e $|\mathbf{x}(t)| \leq r_1(E) \leq 2E$, dove abbiamo usato che $r_1(E) \leq \sqrt{2E}$, come si controlla facilmente. Questo implica $||(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))|| \leq 2\sqrt{E} = \varepsilon$, da cui la stabilità.

2 - Dimostriamo che $\bar{\mathbf{x}} := 1/\sqrt{2}(\cos\theta, \sin\theta)$ per $\theta \in [0, 2\pi)$ è instabile. Prendiamo un dato iniziale

$$(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta),\ \frac{1}{\sqrt{2}}\delta(\cos\theta, \sin\theta) \right).$$

Definiamo

$$\mathbf{y} := \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

quindi

$$\mathbf{y}_0 = (0,0),\ \dot{\mathbf{y}}_0 = (\delta, 0)$$

e

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = 2((y_1 + \sqrt{2})^2 + y_2^2 - 2) \begin{pmatrix} y_1 + \sqrt{2} \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = 0$ quindi $y_2(t) = 0$, e

$$\ddot{y}_1 = 8y_1 + 6\sqrt{2}y_1^2 + 2y_1^3 = -\partial\left(-4y_1^2 - 2\sqrt{2}y_1^3 - \frac{1}{2}y_1^4\right) =: -\partial V(y_1).$$

Se definiamo

$$H := \frac{1}{2}\dot{y}_1^2 + V(y_1)$$

allora $\dot{H} = 0$ e quindi il tempo per arrivare a $y_1 = \epsilon$ è

$$\tau(\epsilon, \delta) = \int_0^\epsilon dy_1\, \frac{1}{\sqrt{2(H - V(y_1))}} = \int_0^\epsilon dy_1\, \frac{1}{\sqrt{2(\delta^2/2 + 4y_1^2 + 2\sqrt{2}y_1^3 + \frac{1}{2}y_1^4)}} < \infty$$

quindi $\bar{\mathbf{x}}$ è instabile.