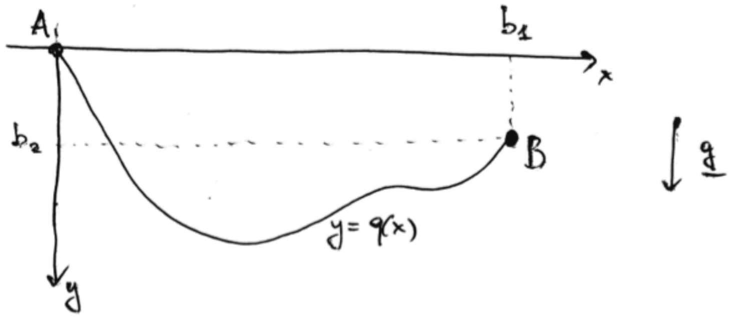
Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO 5 (8-11-2013)

ESERCIZIO 1. Tra tutte le curve che passano per due punti A e B in un piano verticale (con B ad un'altezza minore o uguale di quella di A), determinare quella che gode della proprietà seguente: una particella inizialmente in quiete in A che si cade lungo di essa sotto l'influenza della gravità e in assenza di attrito impiega il tempo minimo per raggiungere B (tale curva si dice *brachistocrona*).

A tale scopo, una volta fissato un sistema di coordinate come in figura :



- Si mostri che il problema corrisponde a minimizzare il funzionale

$$A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x),\dot{q}(x))dx \ , \qquad \mathcal{L}(q(x),\dot{q}(x)) := \sqrt{\frac{1+\dot{q}^2}{2gq}}$$

  nello spazio delle curve $\mathcal{M}_{0,b_1}(0,b_2)$. Qui g è l'accelerazione di gravità, $y = q(x)$ rappresenta il profilo della curva, $A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q)$ ha il significato fisico di "tempo necessario a percorrere la curva $y = q(x)$ da A a B", e il puntino in $\dot{q}(x)$ rappresenta la derivata rispetto a x. [Suggerimento: si usi la conservazione dell'energia meccanica $E = \frac{m}{2}v(x)^2 - mgq(x)$ per ricavare la velocità della particella nel punto $(x, q(x))$, e quindi il tempo di percorrenza.]

- Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange per la curva ottimale.

- Mostrare che tale equazione è risolta da una *cicloide* con cuspide nel punto di partenza. [Suggerimento: si ricordi che l'equazione parametrica di una cicloide con cuspide nell'origine è

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

  da cui si vede che la sua equazione cartesiana ha la forma $y = r(1 - \cos\varphi(x/r))$ dove $\varphi = h^{-1}$ è la funzione inversa di $h(t) = t - \sin t$.]

Soluzione:

1 - Sia $\tau(A,B)$ il tempo in cui la particella va da A a B. Abbiamo

$$\tau(A,B) = \int_0^{\tau(A,B)} dt = \int_0^{b_1} dt(x),$$

dove $dt(x)$ è il tempo impiegato dalla particella per percorrere un tratto di curva infinitesimo, corrispondente a una variazione delle ascisse uguale a dx, a partire dal punto $(x, q(x))$. Se $v(x) \in \mathbb{R}^2$ è la velocità istantanea della particella che si muove lungo la curva, all'istante in cui la particella si trova in $(x, q(x))$, si ha $v(x) = d\ell/dt$, dove $d\ell$ è il valore assoluto dello spostamento infinitesimo della particella lungo la curva, i.e., $d\ell = dx|(1, \dot{q}(x))|$, e quindi:

$$v(x) = \frac{dx}{dt}\sqrt{1+\dot{q}^2}$$

dove $\dot{q} := dq/dx$. Da questa relazione si trova $dt(x) = dx\ \frac{\sqrt{1+\dot{q}^2(x)}}{v(x)}$. Sostituendo nella formula per $\tau(A, B)$ troviamo:

$$\tau(A, B) = \int_0^{b_1} dx\ \frac{\sqrt{1+\dot{q}^2(x)}}{v(x)}.$$

Inoltre, l'energia

$$E = \frac{1}{2}mv(x)^2 - mgq(x)$$

è una costante del moto. Si noti che all'istante iniziale la particella si trova in quiete (i.e., con velocità nulla) nel punto $(0, 0)$, cosicché $E = 0$ e

$$v(x) = \sqrt{2gq(x)}.$$

Sostituendo nella formula per $\tau(A, B)$ troviamo

$$\tau(A, B) = \int_0^{b_1} dx\ \sqrt{\frac{1+\dot{q}^2(x)}{2gq(x)}}.$$

Quindi il problema corrisponde a minimizzare $\tau(A, B)$ rispetto a $q(x)$, nello spazio delle curve $q(x)$ che vanno da A a B, che è equivalente a minimizzare il funzionale

$$\mathcal{A}^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x))dx\ , \qquad \mathcal{L}(q, \dot{q}) := \sqrt{\frac{1+\dot{q}^2}{2gq}}$$

sullo spazio delle curve $(x, q(x))$ passanti per $(0, 0)$ e per (b_1, b_2), i.e., sullo spazio $\mathcal{M}_{0,b_1}(0, b_2)$.

2 - La condizione di minimo per $\mathcal{A}^{\mathcal{L}}_{0,b_1}$ implica la condizione di stazionarietà per $\mathcal{A}^{\mathcal{L}}_{0,b_1}$, che a sua volta è equivalente alle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\ .$$

Questo vuol dire che la curva minimizzante è soluzione di tali equazioni, che possiamo riscrivere piú esplicitamente come

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{q}}{\sqrt{2gq(1+\dot{q}^2)}}\right) = -\frac{\sqrt{1+\dot{q}^2}}{2q\sqrt{2gq}}$$

o anche

$$\frac{1}{\sqrt{2gq(1+\dot{q}^2)}}\left(\ddot{q} - \frac{\dot{q}^2\ddot{q}}{1+\dot{q}^2} - \frac{\dot{q}^2}{2q}\right) + \frac{\sqrt{1+\dot{q}^2}}{2q\sqrt{2gq}} = 0\ .$$

Moltiplicando tutto per $\sqrt{2gq(1+\dot{q}^2)}$ troviamo

$$\frac{\ddot{q}}{1+\dot{q}^2} + \frac{1}{2q} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2q\ddot{q} + \dot{q}^2 + 1 = 0.$$

3 - Dimostriamo che

$$q(x) = r\left(1 - \cos\left(\phi\left(\frac{x}{r}\right)\right)\right)$$

dove $\phi := h^{-1}$ con $h(t) := t - \sin t$, è una soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange. Abbiamo

$$\phi'(x) = \frac{1}{h'(\phi(x))} = \frac{1}{1 - \cos(\phi(x))}$$

quindi

$$\dot q(x) = \sin\left(\phi\left(\frac{x}{r}\right)\right)\phi'\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\sin(\phi(x/r))}{1 - \cos(\phi(x/r))}$$

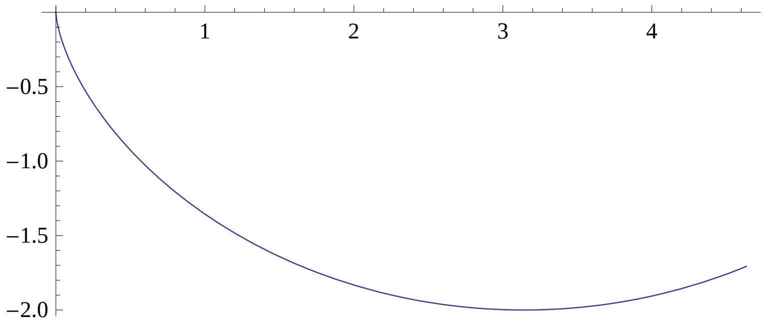
e

$$\ddot q(x) = -\frac{1}{r(1 - \cos(\phi(x/r)))}\phi'\left(\frac{x}{r}\right) = -\frac{1}{r(1 - \cos(\phi(x/r)))^2}$$

Si verifica subito che tali espressioni verificano identicamente:

$$2q\ddot q + \dot q^2 + 1 = 0$$

come desiderato. Quindi la cicloide con cuspide in 0 è un punto stazionario del funzionale considerato. Si può dimostrare che tale curva non solo è un punto stazionario, ma anche di minimo globale, ma non discuteremo qui questa questione. La forma della brachistocrona è



Esercizio 2. Determinare la forma che assume una corda pesante di lunghezza ℓ, i cui estremi sono fissati nei punti A e B del piano verticale $x - y$ (tale forma definisce una curva chiamata *catenaria*). A tale scopo, si determini la curva passante in A e B che minimizza l'energia potenziale gravitazionale, tra tutte quelle a lunghezza fissata ℓ. Si fissi il sistema di coordinate come in figura e si proceda come segue.

- Si mostri che il problema corrisponde a minimizzare il funzionale

$$A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x), \dot q(x))dx\ , \qquad \mathcal{L}(q(x), \dot q(x)) := -(\lambda + g\rho q)\sqrt{1 + \dot q^2}$$

  nello spazio delle curve $\mathcal{M}_{0,b_1}(0, b_2)$. Qui g è l'accelerazione di gravità, ρ la densità lineare della corda, e λ una costante (moltiplicatore di Lagrange) che va fissata in modo tale che la lunghezza totale della curva $\int_0^{b_1}\sqrt{1 + \dot q^2(x)}dx$ sia uguale ad ℓ. [Suggerimento: si osservi che l'energia potenziale gravitazionale di un elemento $d\ell$ di curva attorno a $(x, q(x))$ è $-\rho g\sqrt{1 + \dot q^2(x)}dx$.]

- Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange per la curva ottimale.

- Mostrare che tale equazione è risolta da un coseno iperbolico di ampiezza opportuna.

Soluzione:

1 - L'energia potenziale gravitazionale è

$$U_g[q(x)] = -\int_0^{b_1} dx\ g\rho q(x)\sqrt{1+\dot{q}(x)}\ .$$

Tale espressione va minimizzata nello spazio delle curve $(x, q(x))$ o passanti per $(0,0)$ e (b_1, b_2), con il vincolo che la lunghezza totale della curva $\int_0^{b_1} dx\ \sqrt{1+\dot{q}(x)}$ sia uguale a ℓ. Introduciamo quindi un moltiplicatore di Lagrange associato a tale vincolo, e riformuliamo il problema di minimo vincolato come un problema di minimo non vincolato per il funzionale $U_g[q(x)] - \lambda\int_0^{b_1} dx\ \sqrt{1+\dot{q}(x)}$, dove λ è una costante da fissarsi in modo tale che $\int_0^{b_1} dx\sqrt{1+\dot{q}(x)} = \ell$. In questo modo il funzionale complessivo da minimizzare è

$$A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = U_g[q(x)] - \lambda\int_0^{b_1} dx\ \sqrt{1+\dot{q}(x)} = -\int_0^{b_1} (\lambda + g\rho q(x))\sqrt{1+\dot{q}(x)}\ .$$

2 - Come nel problema precedente, la curva che realizza il minimo va cercata tra quelle che risolvono l'equazione di Eulero-Lagrange associate alla Lagrangiana $\mathcal{L}(\xi,\eta) = -(\lambda + g\rho\xi)\sqrt{1+\eta^2}$, che ha la forma:

$$\frac{d}{dx}\left((\lambda + g\rho q)\frac{\dot{q}}{\sqrt{1+\dot{q}^2}}\right) = g\rho\sqrt{1+\dot{q}^2}$$

che è equivalente a

$$(\lambda + g\rho q)\ddot{q} - g\rho(1+\dot{q}^2) = 0 \tag{1}$$

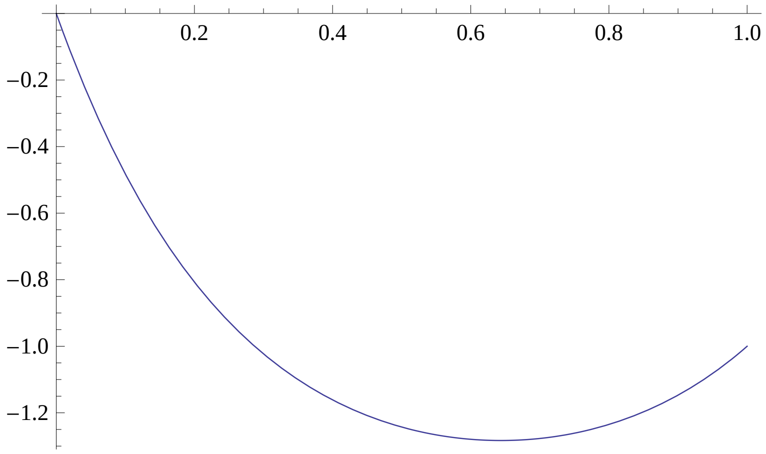
3 - È facile verificare per sostituzione che $q(x) = -\beta^{-1}\big[\cosh(\beta(x-x_0)) - \cosh\beta x_0\big]$ risolve l'equazione di Eulero-Lagrange per ogni β, x_0, a patto di scegliere λ opportunamente: è sufficiente notare che $\dot{q}(x) = -\sinh(\beta(x-x_0))$ e $\ddot{q}(x) = -\beta\cosh(\beta(x-x_0))$, cosicché sostituendo nella (1) troviamo:

$$-\Big(\lambda - g\rho\beta^{-1}\big[\cosh(\beta(x-x_0)) - \cosh\beta x_0\big]\Big)\beta\cosh(\beta(x-x_0)) - g\rho(1+\sinh^2(\beta(x-x_0))) = 0\ ,$$

che è verificata identicamente, se

$$\lambda = -g\rho\beta^{-1}\cosh\beta x_0\ .$$

La forma della soluzione è



Rimangono da fissare i due parametri β, x_0, che vanno scelti in modo tale che $q(b_1) = b_2$ e $\int_0^{b_1} \sqrt{1+\dot{q}(x)^2}\, dx = \ell$. Si può dimostrare che per ogni scelta di $b_1 > 0$, $b_2 \geq 0$ t.c. $b_1^2 + b_2^2 < \ell^2$ esiste un'unica scelta di β, x_0 che realizza le due condizioni $q(b_1) = b_2$ e $\int_0^{b_1} \sqrt{1+\dot{q}(x)^2}\, dx = \ell$, vedi la discussione in appendice.

Appendice - Vogliamo fissare β, x_0 in modo tale che

$$q(b_1) = \beta^{-1}\big[\cosh \beta x_0 - \cosh(\beta(x_0 - b_1))\big] = b_2$$

e

$$\int_0^{b_1} \sqrt{1+\dot{q}(x)^2}\, dx = \int_0^{b_1} \cosh(\beta(x - x_0))\, dx = \beta^{-1}\big[\sinh \beta x_0 - \sinh(\beta(x_0 - b_1))\big] = \ell$$

ovvero

$$\begin{cases} \sinh \beta x_0 - \sinh(\beta(x_0 - b_1)) = \beta \ell \\ \cosh \beta x_0 - \cosh(\beta(x_0 - b_1)) = \beta b_2 \end{cases} \quad (S1)$$

Prendendo il quadrato della prima equazione meno il quadrato della seconda troviamo:

$$2\big[\cosh(\beta(x_0 - b_1))\cosh \beta x_0 - \sinh(\beta(x_0 - b_1))\sinh \beta x_0\big] - 2 = \beta^2(\ell^2 - b_2^2)\ .$$

Usando la formula trigonometrica $\cosh(\alpha - \beta) = \cosh\alpha \cosh\beta - \sinh\alpha \sinh\beta$, vediamo che tale equazione è equivalente a

$$\frac{\cosh(\beta b_1) - 1}{(\beta b_1)^2} = \frac{b_1^2}{2}(\ell^2 - b_2^2) \qquad \Rightarrow \qquad \beta = b_1^{-1} f^{-1}\Big(\frac{b_1^2}{2}(\ell^2 - b_2^2)\Big)\ ,$$

dove $f(x) := (\cosh x - 1)/x^2$ e f^{-1} è la sua funzione inversa.

Rimane da fissare x_0. A tal scopo, riscriviamo la (S1) nella forma

$$\begin{cases} \cosh \beta x_0 - \beta b_2 = \cosh(\beta(x_0 - b_1)) \\ \sinh \beta x_0 - \beta \ell = \sinh(\beta(x_0 - b_1)) \end{cases} \quad (S2)$$

Prendendo il quadrato della prima equazione meno il quadrato della seconda troviamo:

$$\beta^2(\ell^2 - b_2^2) = 2\beta(\ell \sinh \beta x_0 - b_2 \cosh \beta x_0)$$

che si può anche riscrivere come

$$\frac{\beta}{2}\sqrt{\ell^2 - b_2^2} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - b_2^2}} \sinh \beta x_0 - \frac{b_2}{\sqrt{\ell^2 - b_2^2}} \cosh \beta x_0$$

Se definiamo $\alpha_0 := \sinh^{-1}(b_2/\sqrt{\ell^2 - b_2^2})$, tale equazione si può ulteriormente riscrivere come

$$\frac{\beta}{2}\sqrt{\ell^2 - b_2^2} = \cosh \alpha_0 \sinh \beta x_0 - \sinh \alpha_0 \cosh \beta x_0 = \sinh(\beta x_0 - \alpha_0)\ ,$$

dove nella seconda identità abbiamo usato la formula trigonometrica $\sinh(\alpha - \beta) = \sinh\alpha \cosh\beta - \cosh\alpha \sinh\beta$. Invertendo tale equazione troviamo:

$$x_0 = \beta^{-1}\alpha_0 + \beta^{-1}\sinh^{-1}\Big(\frac{\beta}{2}\sqrt{\ell^2 - b_2^2}\Big) = \beta^{-1}\sinh^{-1}\Big(\frac{b_2}{\sqrt{\ell^2 - b_2^2}}\Big) + \beta^{-1}\sinh^{-1}\Big(\frac{\beta}{2}\sqrt{\ell^2 - b_2^2}\Big)\ ,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la definizione di α_0. Tale espressione è la formula desiderata per x_0.