1 Il periodo delle piccole oscillazioni per moti unidimensionali

Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale

$$m\ddot{x} = -U'(x)$$

con U di classe C^3 su $\mathbb{R}$ (per semplicità). Si supponga che x_0 sia un minimo locale isolato non degenere di $U(x)$, i.e., $U'(x_0) = 0$ e $U''(x_0) > 0$.

Sia $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ un intorno del punto di equilibrio $(x_0, 0)$ cosí piccolo che $U''(x) \in [\kappa, 3\kappa]$. In particolare, $U'(x) > 0$ per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ e $U'(x) < 0$ per $x \in [x_0 - \delta, x_0)$. Inoltre, per $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, con ε_0 abbastanza piccolo, l'equazione $U(x) = U(x_0) + \varepsilon^2$ ammette esattamente due soluzioni $x_\pm(\varepsilon)$ in I. Immagineremo I fissato una volte per tutte, e chiameremo $M = \max_{x\in I} |U'''(x)|$.

I moti a energia $E = U(x_0) + \varepsilon^2$, con $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, e con dato iniziale $x(0) \in [x_-(\varepsilon), x_+(\varepsilon)]$, sono periodici di periodo

$$T(\varepsilon) = 2\int_{x_-(\varepsilon)}^{x_+(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(U(x_0) + \varepsilon^2 - U(x))}}$$

Usando il cambio di variabili $u = \frac{x - x_-}{x_+ - x_-}$ possiamo riscrivere

$$T(\varepsilon) = \sqrt{2m}\int_0^1 \frac{(x_+ - x_-)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \big[U\big((x_+ - x_-)u + x_-\big) - U(x_0)\big]}}du \equiv \sqrt{2m}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varphi_\varepsilon(u)}}du$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo definito

$$\varphi_\varepsilon(u) := \frac{\varepsilon^2 - \big[U\big((x_+ - x_-)u + x_-\big) - U(x_0)\big]}{(x_+ - x_-)^2} \tag{1.1}$$

Nel seguito dimostreremo il seguente Lemma.

Lemma 1. *Nelle ipotesi su $U(x)$ ed ε elencate sopra, esiste una costante $K > 0$ tale che, per ogni $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ e $u \in [0, 1]$:*

$$(1 - K\varepsilon)\frac{U''(x_0)}{2}u(1-u) \le \varphi_\varepsilon(u) \le (1 + K\varepsilon)\frac{U''(x_0)}{2}u(1-u)\ . \tag{1.2}$$

Il Lemma 1 sarà dimostrato nella prossima sezione. Il Lemma mostra non solo che il limite puntuale di $\varphi_\varepsilon(u)$ per $\varepsilon \to 0$ è $\frac{U''(x_0)}{2}u(1-u)$, ma anche che tale limite è raggiunto con opportune proprietà di uniformità, che sono sufficienti a mostrare che si può scambiare il limite e l'integrale. Infatti, assumendo il Lemma 1, è facile dimostrare il risultato principale di queste note:

Teorema 1. *Nelle ipotesi su $U(x)$ ed ε elencate sopra, il limite di $T(\varepsilon)$ per $\varepsilon \to 0$ esiste ed è uguale a:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon) = 2\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}du = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}} =: T_0$$

In altre parole, nel limite di piccole oscillazioni ($x_\pm(\varepsilon) \to 0$), il periodo del moto tende a quello dell'oscillatore armonico associato al potenziale quadratico che approssima meglio il potenziale assegnato attorno al punto di equilibrio x_0, i.e., $\frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$.

Dimostrazione del Teorema 1. Riscriviamo la formula per $T(\varepsilon)$ nella forma:

$$\begin{aligned}
T(\varepsilon) &= \sqrt{2m}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varphi_\varepsilon(u)}}du = \\
&= \sqrt{2m}\int_0^1 \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}du + \sqrt{2m}\int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{\varphi_\varepsilon(u)}} - \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\Big)du
\end{aligned}$$

dove abbiamo semplicemente aggiunto e sottratto sotto segno di integrale il valore limite (per $\varepsilon \to 0$) della funzione integranda. Ora, il primo termine nella seconda riga è uguale a T_0. Il secondo termine può essere stimato in norma come segue:

$$\begin{aligned}
&\Big|\sqrt{2m}\int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{\varphi_\varepsilon(u)}} - \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\Big)du\Big| \leq \\
&\leq \sqrt{2m}\int_0^1 \Big|\frac{1}{\sqrt{\varphi_\varepsilon(u)}} - \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\Big|du \leq \\
&\leq 2\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}\max\Big\{\frac{1}{\sqrt{1-K\varepsilon}}-1, 1-\frac{1}{\sqrt{1+K\varepsilon}}\Big\}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}du = \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-K\varepsilon}}-1\Big)\,,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato il risultato del Lemma 1, che implica immediatamente che

$$\sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\frac{1}{\sqrt{1-K\varepsilon}} \leq \frac{1}{\sqrt{\varphi_\varepsilon(u)}} \leq \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\frac{1}{\sqrt{1+K\varepsilon}}\,,$$

mentre nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\frac{1}{\sqrt{1-K\varepsilon}} - 1 \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{1+K\varepsilon}}$, come è facile verificare. Infine, $\frac{1}{\sqrt{1-K\varepsilon}} - 1 = \frac{K\varepsilon}{\sqrt{1-K\varepsilon}}\frac{1}{1+\sqrt{1-K\varepsilon}} \leq 2K\varepsilon$ per ε abbastanza piccolo. Quindi il resto stimato nella (1.3) è minore di $2K\varepsilon T_0$, che tende a zero per $\varepsilon \to 0$. QED

1.1 Dimostrazione del Lemma 1

Per dimostrare il Lemma 1 abbiamo innanzitutto bisogno del seguente risultato preliminare.

Lemma 2. *Nelle ipotesi su $U(x)$ ed ε elencate sopra, esiste una costante $K' > 0$ tale che, per ogni $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, le radici $x_\pm(\varepsilon)$ soddisfano:*

$$\left| x_\pm - x_0 \mp \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\varepsilon \right| \leq K'\varepsilon^2 \tag{1.4}$$

Dimostrazione del Lemma 2. Dimostriamo la (1.4) per x_+, la dimostrazione per x_- essendo del tutto analoga. Sotto le ipotesi considerate, x_+ è l'unica radice di $U(x) - U(x_0) = \varepsilon^2$ nel semi-intorno destro $I_+ = (x_0, x_0 + \delta]$ di x_0, su cui $U'(x) > 0$. Per determinare in modo approssimato la posizione di x_+, esibiremo due valori di $x_{1,2}$ in I_+, della forma $x_{1,2} = x_0 + \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\varepsilon \mp K'\varepsilon^2$, in corrispondenza dei quali $U(x)$ risulterà minore e maggiore di $U(x_0) + \varepsilon^2$, rispettivamente: di conseguenza x_+ sarà compreso tra questi due valori, da cui la (1.4). Per calcolare il valore di $U(x)$ in corrispondenza di $x = x_{1,2}$, usiamo lo sviluppo di Taylor attorno a x_0:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{U'''(x^*)}{6}(x-x_0)^3\,,$$

dove $x^* \in (x_0, x)$. Se sostituiamo in questa equazione l'espressione di $x_1 = x_0 + \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\varepsilon - K'\varepsilon^2$ troviamo

$$U(x_1) = U(x_0) + \frac{U''(x_0)}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\varepsilon - K'\varepsilon^2\right)^2 + \frac{U'''(x_1^*)}{6}\left(\sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\varepsilon - K'\varepsilon^2\right)^3 =$$

$$= U(x_0) + \varepsilon^2 - \sqrt{2U''(x_0)}\varepsilon^3\left[K'\left(1 - \sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}}\frac{K'\varepsilon}{2}\right) - \frac{U'''(x_1^*)}{3\big[U''(x_0)\big]^2}\left(1 - \sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}}K'\varepsilon\right)^3\right]$$

dove $x_1^* \in (x_0, x_1)$. Sia $M = \max_{x\in I}|U'''(x)|$. Prendendo $K' = 2M/(3[U''(x_0)]^2)$ e ε abbastanza piccolo, l'espressione in parentesi quadre è positiva, e quindi $U(x_1) < U(x_0)+\varepsilon^2$. Analogamente, se $x_2 = x_0 + \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\varepsilon + K'\varepsilon^2$,

$$U(x_2) = U(x_0)+\varepsilon^2+\sqrt{2U''(x_0)}\varepsilon^3\left[K'\left(1 + \sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}}\frac{K'\varepsilon}{2}\right)+\frac{U'''(x_1^*)}{3\big[U''(x_0)\big]^2}\left(1 + \sqrt{\frac{U''(x_0)}{2}}K'\varepsilon\right)^3\right]$$

Di nuovo, se $K' = 2M/(3[U''(x_0)]^2)$ e ε abbastanza piccolo, l'espressione in parentesi quadre è positiva, e quindi $U(x_2) > U(x_0) + \varepsilon^2$. Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste un valore di x compreso tra x_1 e x_2 per cui $U(x) = U(x_0) + \varepsilon^2$, e necessariamente tale valore coincide con x_+ (semplicemente perchè x_+ è l'unica radice di $U(x) = U(x_0) + \varepsilon^2$ in I_+). In conclusione:

$$x_1 = x_0 + \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\varepsilon - K'\varepsilon^2 < x_+ < x_0 + \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\varepsilon + K'\varepsilon^2 = x_2$$

che dimostra la (1.4) per x_+. Per x_- si procede in modo del tutto analogo. QED

Siamo finalmente pronti a dimostrare il Lemma 1. Riscriviamo la disuguaglianza da dimostrare, la (1.2), nella forma equivalente:

$$\left|\frac{\varphi_\varepsilon(u) - U''(x_0)u(1-u)/2}{U''(x_0)u(1-u)/2}\right| \le K\varepsilon \tag{1.5}$$

e dimostriamola separatamente in tre casi: $\frac{1}{4} \le u \le \frac{3}{4}$, $0 \le u \le \frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4} \le u \le 1$.

Caso 1: $\frac{1}{4} \le u \le \frac{3}{4}$**.** Partiamo dalla definizione (1.1) di $\varphi_\varepsilon(u)$, e sviluppiamo $U((x_+ - x_-)u + x_-)$ in serie di Taylor attorno a x_0:

$$\varphi_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon^2}{(x_+ - x_-)^2} - \frac{U''(x_0)}{2}\Big(u + \frac{x_- - x_0}{x_+ - x_-}\Big)^2 - \frac{U'''(x_u^*)}{6}(x_+ - x_-)\Big(u + \frac{x_- - x_0}{x_+ - x_-}\Big)^3$$

dove x_u^* è compreso tra x_0 e $(x_+ - x_-)u + x_-$. Usando la (1.4) possiamo riscrivere questa equazione come

$$\varphi_\varepsilon(u) = \frac{U''(x_0)}{8}+K_1(\varepsilon)-\frac{U''(x_0)}{2}\Big(u+\frac{1}{2}+K_2(\varepsilon)\Big)^2-\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{U'''(x_u^*)}{\sqrt{U''(x_0)}}\varepsilon\big(1+K_3(\varepsilon)\big)\Big(u+\frac{1}{2}+K_2(\varepsilon)\Big)^3$$

dove qui e nel seguito indichiamo con $K_i(\varepsilon)$ delle funzioni di ε tali che $|K_i(\varepsilon)| \le C_i\varepsilon$ per opportune costanti $C_i > 0$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}&\varphi_\varepsilon(u) - \frac{U''(x_0)}{8} - \frac{U''(x_0)}{2}\big(u + \frac{1}{2}\big)^2 =\\ &= K_1(\varepsilon) - \frac{U''(x_0)}{2}K_2(\varepsilon)\big(2u + 1 + K_2(\varepsilon)\big) - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{U'''(x_u^*)}{\sqrt{U''(x_0)}}\varepsilon\big(1 + K_3(\varepsilon)\big)\Big(u + \frac{1}{2} + K_2(\varepsilon)\Big)^3 =\\ &=: K_1(\varepsilon, u)\end{aligned} \tag{1.6}$$

dove qui e nel seguito indichiamo con $K_i(\varepsilon, u)$ delle funzioni di ε e u tali che $|K_i(\varepsilon, u)| \leq C_i'\varepsilon$ per opportune costanti $C_i' > 0$, uniformemente in $u \in [0, 1]$. Abbiamo quindi che per $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{3}{4}$:

$$\Big|\frac{\varphi_\varepsilon(u) - U''(x_0)u(1-u)/2}{U''(x_0)u(1-u)/2}\Big| \leq \frac{|K_1(\varepsilon, u)|}{U''(x_0)u(1-u)/2} \leq \frac{C_1'\varepsilon}{3U''(x_0)/32}$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo usato la (1.6), mentre nella seconda il fatto che $u(1-u) \geq 3/16$, $\forall x \in [1/4, 3/4]$. Questo conclude la dimostrazione della (1.5) nel primo caso.

Caso 2: $0 \leq u \leq \frac{1}{4}$**.** Partiamo dalla definizione (1.1) di $\varphi_\varepsilon(u)$, e sviluppiamo $U((x_+ - x_-)u + x_-)$ in serie di Taylor attorno a x_-:

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(u) = {} & \frac{1}{(x_+ - x_-)^2}\Big[U(x_0) + \varepsilon^2 - U(x_-) - \\ & -U'(x_-)(x_+ - x_-)u - \frac{U''(x_-)}{2}(x_+ - x_-)^2u^2 - \frac{U'''(x_u^{**})}{6}(x_+ - x_-)^3u^3\Big]\end{aligned} \tag{1.7}$$

dove x_u^{**} è compreso tra x_- e $(x_+ - x_-)u + x_-$. Notiamo ora che:

1. $U(x_0) + \varepsilon^2 - U(x_-) = 0$, per la definizione di x_-;
2. $U'(x_-) = U''(x_0)(x_- - x_0) + \frac{U'''(x_-^*)}{2}(x_- - x_0)^2$, dove $x_-^* \in (x_-, x_0)$, come segue da una sviluppo di Taylor di $U'(x)$ attorno a x_0; usando il Lemma 2, possiamo anche riscrivere tale equazione nella forma $U'(x_-) = -\frac{U''(x_0)}{2}(x_+ - x_-)(1 + K_4(\varepsilon))$;
3. $U''(x_-) = U''(x_0) + U'''(x_-^{**})(x_- - x_0)$, dove $x_-^{**} \in (x_-, x_0)$, come segue da uno sviluppo di Taylor di $U''(x)$ attorno a x_0; usando il Lemma 2, possiamo anche riscrivere tale equazione nella forma $U''(x_-) = U''(x_0)(1 + K_5(\varepsilon))$.

Usando tali relazioni nella (1.7), e definendo $K_2(\varepsilon, u) = -\frac{U'''(x_u^{**})}{6}(x_+ - x_-)$, troviamo

$$\varphi_\varepsilon(u) = \frac{U''(x_0)}{2}u(1 + K_4(\varepsilon)) - \frac{U''(x_0)}{2}u^2(1 + K_5(\varepsilon)) + K_2(\varepsilon, u)u^3$$

In conclusione:

$$\varphi_\varepsilon(u) - \frac{U''(x_0)}{2}u(1-u) = \frac{U''(x_0)}{2}uK_4(\varepsilon) - \frac{U''(x_0)}{2}u^2K_5(\varepsilon) + K_2(\varepsilon, u)u^3 =: uK_3(\varepsilon, u)$$

e quindi, per $0 \leq u \leq \frac{1}{4}$,

$$\Big|\frac{\varphi_\varepsilon(u) - U''(x_0)u(1-u)/2}{U''(x_0)u(1-u)/2}\Big| \leq \frac{u|K_3(\varepsilon, u)|}{U''(x_0)u(1-u)/2} \leq \frac{C_3'\varepsilon}{3U''(x_0)/8}$$

come volevasi dimostrare.

Caso 3: $\frac{3}{4} \leq u \leq 1$**.** Questo caso è del tutto analogo al precedente, e si tratta partendo dalla definizione (1.1) di $\varphi_\varepsilon(u)$, e sviluppando $U((x_+ - x_-)u + x_-)$ in serie di Taylor attorno a x_+. Lasciamo i dettagli al lettore. Questo conclude la dimostrazione del Lemma 1, e quindi del Teorema 1. QED