

### Prova pre-esonero (25-10-2013)

1. Si determini la soluzione generale del sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + 2y + 3 \\ \dot{y} = -x + (2 - \alpha)y + t \end{cases} \quad (1)$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Si consideri poi il sistema lineare ottenuto dal precedente eliminando il termine  $t$  a membro di destra della seconda equazione. Si discuta se al variare di  $\alpha$  esistono posizioni di equilibrio, e se ne studi la stabilità.

2. Si consideri il sistema descritto dall'equazione su  $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} = e^{-x}(x^3 - 4x^2 + 2x)$$

- (a) Si determini una quantità conservata del moto.
  - (b) Si determinino i punti di equilibrio del sistema.
  - (c) Si studi la stabilità dei punti di equilibrio
  - (d) Si stabilisca se il moto è definito globalmente per tutti i dati iniziali. Se no si identifichino i dati iniziali per cui il moto è globale e quelli per cui non lo è.
  - (e) (**Facoltativo.**) Si considerino le piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio  $x = 0$ . Si calcoli il valore limite del periodo nel limite di piccole oscillazioni.
3. Sia dato il sistema meccanico su  $\mathbb{R}^2$ :

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}U(\mathbf{x})$$

associato alla forza conservativa di energia potenziale  $U(\mathbf{x}) = \sin x_1$  (qui  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ).

- (a) Si determinino i punti di equilibrio del sistema
- (b) Se ne dimostri la stabilità o instabilità usando la definizione di stabilità.
- (c) (**Facoltativo.**) Si immagini di aggiungere alle equazioni un termine di attrito  $-\gamma\dot{\mathbf{x}}$ . Come cambiano (se cambiano) le proprietà di stabilità dei punti di equilibrio?