Soluzioni della prova pre-esonero del 25-10-2013

1. Si determini la soluzione generale del sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + 2y + 3 \\ \dot{y} = -x + (2-\alpha)y + t \end{cases} \tag{1}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si consideri poi il sistema lineare ottenuto dal precedente eliminando il termine t a membro di destra della seconda equazione. Si discuta se al variare di α esistono posizioni di equilibrio, e se ne studi la stabilità.

Soluzione: Definiamo $\mathbf{x} := (x, y)$ e scriviamo (1) come

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -1 & 2-\alpha \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix} =: A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t).$$

a.1 - Gli autovalori di A sono

$$\lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha - 1}$$

Quindi, se

$$\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha - 1} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 1 \pm \sqrt{2}.$$

si ha che $\lambda_+ \neq \lambda_-$, e gli autovettori di A corrispondenti agli autovalori $\lambda_{\pm}$ sono

$$\mathbf{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{\lambda_{\pm} - \alpha}{2} x \end{pmatrix}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Scegliendo $x = 2$, le matrici di cambiamento di base e di coordinate prendono la forma:

$$P := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ (\lambda_+ - \alpha) & (\lambda_- - \alpha) \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2(\lambda_- - \lambda_+)} \begin{pmatrix} \lambda_- - \alpha & -2 \\ -\lambda_+ + \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

in termini delle quali:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

Ponendo

$$\mathbf{y} := P^{-1}\mathbf{x}$$

possiamo scrivere (1) come

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \mathbf{y} + P^{-1}\mathbf{b}(t)$$

dove

$$P^{-1}\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix}$$

con:

$$a_1 = -\frac{3}{2}\frac{\lambda_- - \alpha}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad a_2 = \frac{3}{2}\frac{\lambda_+ - \alpha}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad b_1 = -b_2 = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

Quindi

$$y_1(t) = e^{\lambda_+ t}\big[y_1(0) + \int_0^t e^{-\lambda_+ \tau}(a_1 + b_1\tau)d\tau\big] = e^{\lambda_+ t}\big[y_1(0) + a_1\frac{1 - e^{-\lambda_+ t}}{\lambda_+} + b_1\frac{1 - e^{-\lambda_+ t}(1 + \lambda_+ t)}{\lambda_+^2}\big]$$

$$y_2(t) = e^{\lambda_- t}\big[y_2(0) + \int_0^t e^{-\lambda_- \tau}(a_2 + b_2\tau)d\tau\big] = e^{\lambda_- t}\big[y_2(0) + a_2\frac{1 - e^{-\lambda_- t}}{\lambda_-} + b_2\frac{1 - e^{-\lambda_- t}(1 + \lambda_- t)}{\lambda_-^2}\big].$$

Si noti che nel caso in cui $\lambda_- = 0$ (che si verifica per $\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$) l'espressione nella seconda riga va interpretata come uguale al suo limite per $\lambda_- \to 0$, i.e.,

$$y_2(t)\big|_{\lambda_-=0} = y_2(0) + a_2 t + b_2 \frac{t^2}{2}$$

La soluzione generale è

$$\mathbf{x}(t) = y_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_+ - \alpha}{2} \end{pmatrix} + y_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_- - \alpha}{2} \end{pmatrix}$$

con $y_{1,2}(t)$ ricavate nelle equazioni precedenti. Si noti che la soluzione generale, cosí scritta, è parametrizzata dalle due costanti $y_1(0)$ e $y_2(0)$.

a.2 - I casi

$$\alpha = 1 \pm \sqrt{2}$$

possono essere trattati adattando il ragionamento precedente: in questo caso A non è diagonalizzabile, quindi si deve calcolare la forma canonica di Jordan di A. L'autovalore è $\lambda = 1$ e l'unico autovettore, nei due casi in cui $\alpha = 1 \pm \sqrt{2}$ è:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

L'autovettore generalizzato, tale che $(A - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\mathbf{v_2} = \mathbf{v}_1$ può essere scelto come $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$, cosicché le matrici di cambiamento di base e di coordinate prendono la forma:

$$P := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \mp\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

in termini delle quali:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ponendo

$$\mathbf{y} := P^{-1}\mathbf{x}$$

possiamo scrivere (1) come

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + P^{-1}\mathbf{b}(t)$$

dove

$$P^{-1}\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ \pm 3/\sqrt{2} + t \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = y_2 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} + t \quad \Rightarrow \quad y_2(t) &= e^t \Big[y_2(0) + \int_0^t e^{-\tau} (\pm \frac{3}{\sqrt{2}} + \tau) d\tau \Big] = \\ &= e^t \Big[y_2(0) + 1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \Big] - \big(1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} + t\big) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = y_1 + y_2 + \frac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad y_1(t) = e^t \big[y_1(0) + \int_0^t \big(y_2(0) + 1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} - e^{-\tau} \big(1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} + \tau\big)\big) d\tau \Big] = \\ &= e^t \big[y_1(0) + \big(y_2(0) + 1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \big) t - \big(1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}\big)(1 - e^{-t}) - 1 + (1+t)e^{-t} \Big] \end{aligned}$$

che è parametrizzata dalle due costanti $y_1(0)$ e $y_2(0)$.

b - I punti di equilibrio sono dati dall'equazione $\dot{\mathbf{x}} = 0$ quindi

$$A\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{b}$$

dove

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -1 & 2-\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b.1 - Se

$$-\alpha^2 + 2\alpha + 2 \neq 0$$

che vuol dire $\alpha \neq 1 \pm \sqrt{3}$, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{-\alpha^2 + 2\alpha + 2} \begin{pmatrix} 2-\alpha & -2 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

quindi

$$\bar{\mathbf{x}} = -\frac{3}{-\alpha^2 + 2\alpha + 2} \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $\bar{\mathbf{x}}$ è l'unico punto di equilibrio del sistema. Inoltre, se $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ allora il sistema è equivalente a

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} \ .$$

Gli autovalori di A sono

$$\lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha - 1} = 1 \pm \sqrt{(\alpha - (1+\sqrt{2}))(\alpha - (1-\sqrt{2}))}$$

In particolare

$$\mathrm{Re}(\lambda_+) > 0$$

quindi $\bar{\mathbf{x}}$ è instabile.

b.2 - Se

$$\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$$

allora

$$A\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{b}$$

non ha nessuna soluzione:

$$\begin{cases} (1 \pm \sqrt{3})x + 2y = -3 \\ (1 \mp \sqrt{3})y - x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow 0 = -3$$

quindi non ci sono punti di equilibrio.

2. Si consideri il sistema descritto dall'equazione su $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} = e^{-x}(x^3 - 4x^2 + 2x)$$

(a) Si determini una quantità conservata del moto.

(b) Si determinino i punti di equilibrio del sistema.

(c) Si studi la stabilità dei punti di equilibrio

(d) Si stabilisca se il moto è definito globalmente per tutti i dati iniziali. Se no si identifichino i dati iniziali per cui il moto è globale e quelli per cui non lo è.

(e) (**Facoltativo.**) Si considerino le piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio $x = 0$. Si calcoli il valore limite del periodo nel limite di piccole oscillazioni.

Soluzione:

a - Definendo

$$U(x) := (x^3 - x^2)e^{-x}$$

troviamo

$$U'(x) = (3x^2 - 2x - x^3 + x^2)e^{-x} = (-x^3 + 4x^2 - 2x)e^{-x}$$

e quindi l'equazione assegnata si può riscrivere nella forma

$$\ddot{x} = -U'(x)$$

da cui segue che l'energia

$$E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + (x^3 - x^2)e^{-x}$$

è conservata. Il grafico di U è riportato in Figura 1. Il grafico delle curve di livello (traiettorie

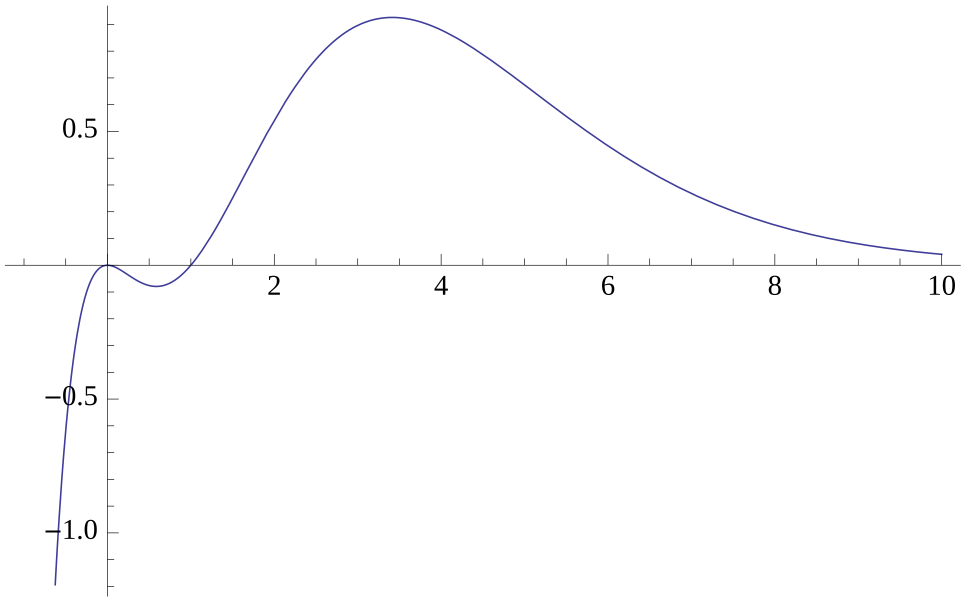

Figura 1: Il grafico del potenziale $U(x)$

nel piano delle fasi) è riportato in Figura 2. In Figura 3 è riportato uno zoom del piano delle fasi in un intorno dell'origine.

b - I punti di equilibrio sono i punti critici di U quindi

$$x_0 = 0, \;\; x_\pm = 2 \pm \sqrt{2}.$$

c - Abbiamo

$$U''(x_0) = -2 < 0, \;\; U''(x_+) = -4(1 + \sqrt{2})e^{-x_+} < 0, \;\; U''(x_-) = -4(1 - \sqrt{2})e^{-x_-} > 0$$

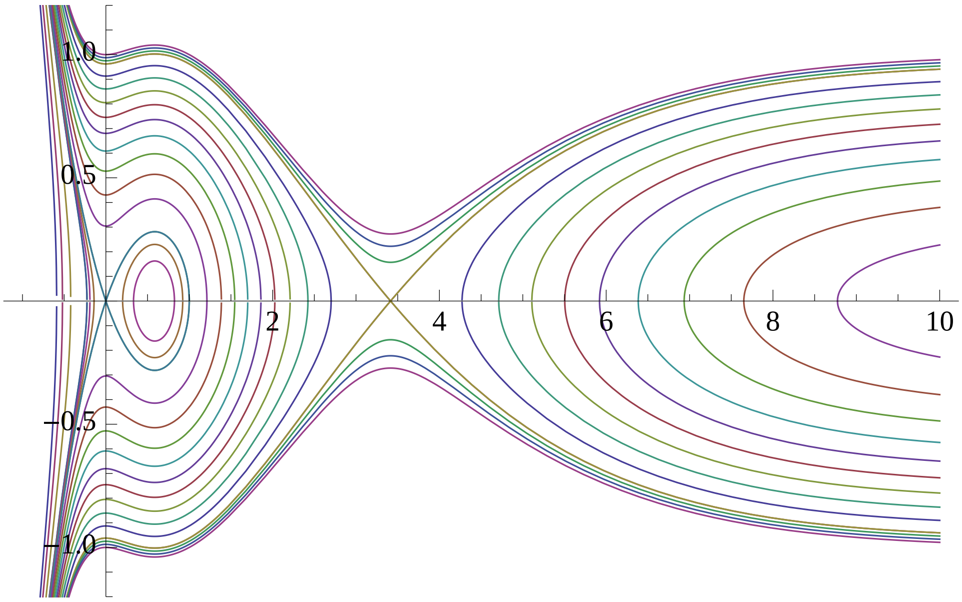

Figura 2: Le traiettorie nel piano delle fasi

quindi x_0 e x_+ sono massimi di U, mentre x_- è un minimo di U: di conseguenza, x_0 e x_+ sono instabili, mentre x_- è stabile.

d - Per ogni $y \in \mathbb{R}$, il potenziale è limitato dall basso per $x \geqslant y$. Quindi ogni soluzione che non diverge a $-\infty$ esiste globalmente. Analogamente, si vede che le traiettorie che divergono a $+\infty$ nel futuro sono definite globalmente nel futuro, e traiettorie che divergono a $+\infty$ nel passato sono definite globalmente nel passato. Resta da discutere l'esistenza globale (nel futuro e/o nel passato) dell traiettorie, o delle porzioni di traiettoria, che divergono a $-\infty$. Il tempo per arrivare a $-\infty$ a partire dalla posizione x_0 al tempo $t_0 = 0$ è, in valore assoluto,

$$\tau_{-\infty}(x(0)) = \int_{-\infty}^{x_0} dx \; \frac{1}{\sqrt{2(E - (x^3 - x^2)e^{-x})}} < +\infty$$

poichè $1/\sqrt{E - U(x)} \sim e^{-|x|/2}|x|^{-3/2}$, che è intregrabile all'infinito. Quindi i moti che divergono a $-\infty$ non sono definiti globalmente. I moti globali sono allora tutti i e soli quelli che rimangono limitati, o che divergono solo a $+\infty$, i.e.,

- se $E \in (0, U(x_+)]$ allora il moto è definito globalmente se e solo se $x(0) \geqslant x_+$;
- se $E \in [U(x_-), 0]$ allora il moto è definito globalmente se e solo se $x(0) \geqslant 0$;
- in tutti gli altri casi il moto non esiste globalmente (o nel passato o nel futuro o in entrambe le direzioni temporali).

e - Consideriamo le piccole oscillazioni attorno a x_-: supponiamo che $E = U(x_-) + \epsilon^2$. Le intersezioni tra $U(x)$ e E sono

$$U(x_-) + \epsilon^2 = U(x) = U(x_-) + \frac{1}{2}(x - x_-)^2 U''(x_-) + O(x - x_-)^3$$

quindi

$$x_e^{\pm} := x_- \pm \frac{\sqrt{2}\epsilon}{\sqrt{U''(x_-)}} + O(\epsilon^2).$$

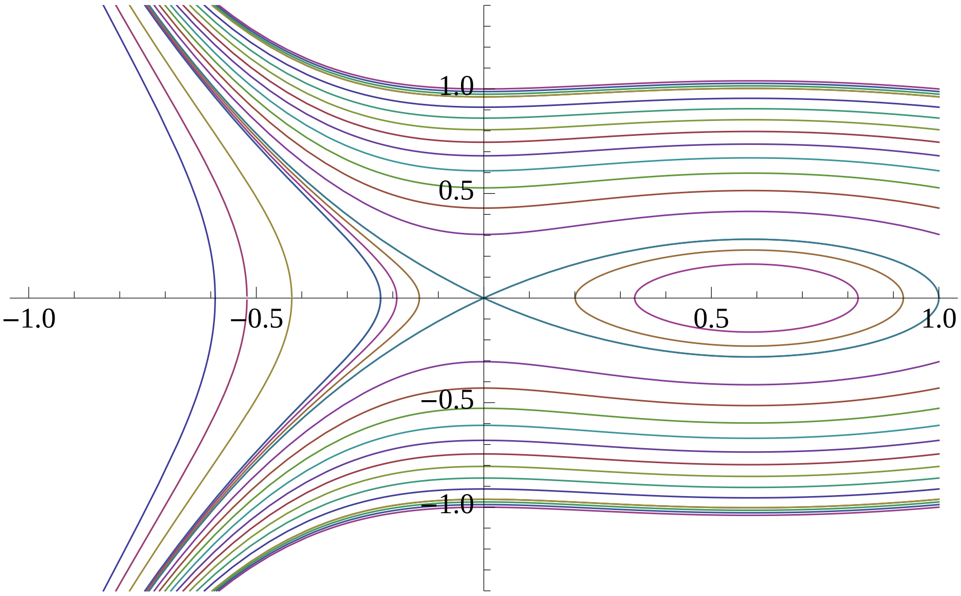

Figura 3: Uno zoom delle traiettorie nel piano delle fasi, in un intorno dell'origine

Il periodo delle piccole oscillazioni è

$$T = \sqrt{2}\int_{x_e^-}^{x_e^+} dx\, \frac{1}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{2}\int_{x_e^-}^{x_e^+} dx\, \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - \frac{1}{2}(x - x_-)^2 U''(x_-) + O(\epsilon^3)}}$$

quindi

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2}\int_0^1 du\, \frac{x_e^+ - x_e^-}{\sqrt{\epsilon^2 - \frac{1}{2}(x_e^- + u(x_e^+ - x_e^-) - x_-)^2 U''(x_-)}}(1 + O(\epsilon)) = \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 du\, \frac{\frac{2\sqrt{2}\epsilon}{\sqrt{U''(x_-)}}}{\sqrt{\epsilon^2 - \epsilon^2(2u-1)^2}}(1 + O(\epsilon)) = \frac{4}{\sqrt{U''(x_-)}}\int_0^1 du\, \frac{1}{2\sqrt{u(1-u)}}(1 + O(\epsilon)) \end{aligned}$$

dove negli ultimi passaggi l'errore $O(\epsilon)$ è una funzione di u, stimata in modulo da (cost.)ϵ un uniformemente per $u \in [0, 1]$. Possiamo quindi scambiare limite e integrale, e ottenere cosí

$$\lim_{\epsilon \to 0} T = \frac{2}{\sqrt{U''(x_-)}}\int_0^1 du\, \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(x_-)}} = \frac{\pi}{\sqrt{\sqrt{2} - 1}} e^{1 - \sqrt{2}/2}.$$

3. Sia dato il sistema meccanico su $\mathbb{R}^2$:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} U(\mathbf{x})$$

associato alla forza conservativa di energia potenziale $U(\mathbf{x}) = \sin x_1$ (qui $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$).

(a) Si determinino i punti di equilibrio del sistema

(b) Se ne dimostri la stabilità o instabilità usando la definizione di stabilità.

(c) (**Facoltativo.**) Si immagini di aggiungere alle equazioni un termine di attrito $-\gamma\dot{\mathbf{x}}$. Come cambiano (se cambiano) le proprietà di stabilità dei punti di equilibrio?

a - I punti critici di U devono soddisfare la condizione

$$(\cos(x_1), 0) = (0, 0)$$

Quindi i punti di equilibrio sono tutti e soli i punti della forma

$$\bar{\mathbf{x}} = (\frac{\pi}{2} + k\pi, \bar{x}_2), \ k \in \mathbb{Z}, \ \bar{x}_2 \in \mathbb{R}.$$

b - Abbiamo

$$\ddot{x}_2 = 0$$

quindi $\dot{x}_2$ è una costante, e quindi

$$x_2(t) = \dot{x}_2(0)t + x_2(0)$$

quindi comunque preso $\dot{x}(0)$ piccolo ma diverso da zero: $\lim_{t\to\infty} |x_2(t)| = \infty$, che implica che tutti i punti di equilibrio sono instabili (infatti basta prendere il dato iniziale con $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)) = (\bar{\mathbf{x}}, (0, \delta))$, con $\bar{\mathbf{x}}$ punto di equilibrio: per δ piccolo ma diverso da zero questo è arbitrariamente vicino a $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$ ma genera un moto che diverge all'infinito).

c - Aggiungiamo la forza di attrito $-\gamma\dot{\mathbf{x}}$ quindi

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\gamma\dot{x}_1 - \cos x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\gamma\dot{x}_2 \end{cases}$$

quindi il moto di x_1 è quello di un pendolo smorzato: se $y_1 := x_1 + \pi/2$ allora

$$\ddot{y}_1 = -\gamma\dot{y}_1 - \sin y_1$$

che è l'equazione del pendolo smorzato, quindi come dimostrato a lezione $-\pi/2 + 2k\pi$ è stabile per il moto di $x_1(t)$, e $\pi/2 + 2k\pi$ è instabile per il moto di $x_1(t)$. Inoltre

$$\dot{x}_2(t) = e^{-\gamma t}\dot{x}_2(0), \quad x_2(t) = -\frac{1}{\gamma}(e^{-\gamma t} - 1)\dot{x}_2(0) + x_2(0)$$

quindi se $|(x_2(0) - \bar{x}_2, \dot{x}_2(0))| \leqslant \delta$ allora

$$|\dot{x}_2(t)| \leqslant \delta, \quad |x_2(t) - \bar{x}_2| \leqslant \delta\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)$$

quindi

$$|(x_2(t) - \bar{x}_2, \dot{x}_2(t)| \leqslant 2\delta(1 + \gamma^{-1})$$

quindi $\bar{x}_2$ è stabile per il moto di $x_2(t)$. Quindi

$$\left\{\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \bar{x}_2\right), \ k \in \mathbb{Z}, \ x_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

sono stabili e

$$\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \bar{x}_2\right), \ k \in \mathbb{Z}, \ x_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

sono instabili.