

FM210 - FISICA MATEMATICA I

PRIMA PROVA DI ESONERO [31-10-2013]

1. (12 punti). Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha - 3, \\ \dot{x}_2 = x_3 + 2\alpha, \\ \dot{x}_3 = -\alpha^2 x_2 \end{cases}$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Al variare di  $\alpha$  in  $\mathbb{R}$ ,

- (a) si scriva la soluzione generale del sistema;
  - (b) si trovino, se esistono, i punti di equilibrio del sistema, e se ne studi la stabilità.
2. (12 punti). Si consideri il sistema meccanico unidimensionale su  $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} = -x^2(1 + 3 \log |x|),$$

dove  $x^2 \log |x| \big|_{x=0}$  va interpretato come uguale a 0.

- (a) Si determini una costante del moto.
  - (b) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
  - (c) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
  - (d) Si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi.
  - (e) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, e se ne scriva il periodo nella forma di un integrale definito.
  - (f) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti aperti, e si discuta se esistono o no globalmente.
  - (g) [Facoltativo.] Si scelga tra i punti di equilibrio un punto stabile, e si considerino le piccole oscillazioni attorno ad esso: si calcoli il valore limite del periodo nel limite di piccole oscillazioni.
3. (6 punti). Sia dato il sistema meccanico su  $\mathbb{R}^2$ :

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} U(\mathbf{x})$$

associato alla forza conservativa di energia potenziale  $U(\mathbf{x}) = -\cosh x_1 + \cos x_2$  (qui  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  è un punto di  $\mathbb{R}^2$ ).

- (a) Si determinino i punti di equilibrio del sistema.
- (b) Si enunci la definizione di punto di equilibrio stabile e di punto di equilibrio instabile.
- (c) Si dimostri la stabilità o instabilità dei punti di equilibrio identificati al punto (a), usando la definizione di stabilità.