Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/14

FM210 - Fisica Matematica I

Prima Prova di Esonero [31-10-2013]

1. **(12 punti).** Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha - 3, \\ \dot{x}_2 = x_3 + 2\alpha, \\ \dot{x}_3 = -\alpha^2 x_2 \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare di α in $\mathbb{R}$,

a. si scriva la soluzione generale del sistema;

b. si trovino, se esistono, i punti di equilibrio del sistema, e se ne studi la stabilità.

Soluzione: Definiamo

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} \alpha - 3 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$ cosicchè

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Gli autovalori di A sono

$$\lambda_0 := \alpha, \quad \lambda_\pm := \pm i\alpha$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ (-1+i)\alpha \\ (-1-i)\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ (-1-i)\alpha \\ (-1+i)\alpha^2 \end{pmatrix}$$

sono gli autovettori di A associati a λ_0, λ_+, λ_-, rispettivamente. Consideriamo separatemente il caso $\alpha \neq 0$ (in cui A è invertibile e i tre autovalori sono distinti) da quello $\alpha = 0$.

a.1 - Supponiamo che $\alpha \neq 0$.

a.1.1 - Risolviamo l'equazione omogenea:

$$\dot{\mathbf{x}}_h = A\mathbf{x}_h.$$

Sia

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & (-1+i)\alpha & (-1-i)\alpha \\ 0 & (-1-i)\alpha^2 & (-1+i)\alpha^2 \end{pmatrix}$$

la matrice di cambiamento di base associata ai tre autovettori del sistema, e facciamo il cambiamento di base

$$\mathbf{y}_h := P^{-1}\mathbf{x}_h$$

(P è invertibile poichè $\alpha \neq 0$) cosicchè

$$\dot{\mathbf{y}}_h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & i\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha \end{pmatrix} \mathbf{y}_h$$

quindi

$$\mathbf{y}_h(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} a_1 \\ e^{i\alpha t} a_2 \\ e^{-i\alpha t} a_3 \end{pmatrix}$$

con $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathbb{C}$ e $a_3 = a_2^*$ (questo segue dalla condizione che $\mathbf{x}_h(t) \in \mathbb{R}$). La soluzione generale del problema omogeneo ha quindi la forma

$$\mathbf{x}_h(t) = P\mathbf{y}_h = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}a_1 + 3(e^{i\alpha t}a_2 + e^{-i\alpha t}a_3) \\ \alpha((-1+i)e^{i\alpha t}a_2 + (-1-i)e^{-i\alpha t}a_3) \\ \alpha^2((-1-i)e^{i\alpha t}a_2 + (-1+i)e^{-i\alpha t}a_3) \end{pmatrix},$$

con

$$a_2 = a_3^*, \quad a_1 \in \mathbb{R}.$$

a.1.2 - Troviamo una soluzione particolare:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 = -\alpha + 3 \\ x_3 = -2\alpha \\ -\alpha^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

quindi poichè $\alpha \neq 0$

$$x_2 = 0,\ x_3 = -2\alpha,\ x_1 = \frac{3-\alpha}{\alpha}$$

a.1.3 - Quindi, se $\alpha \neq 0$, la soluzione generale dell'equazione è

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}a_1 + 3(e^{i\alpha t}a_2 + e^{-i\alpha t}a_2^*) + \frac{3-\alpha}{\alpha} \\ \alpha((-1+i)e^{i\alpha t}a_2 + (-1-i)e^{-i\alpha t}a_2^*) \\ \alpha^2((-1-i)e^{i\alpha t}a_2 + (-1+i)e^{-i\alpha t}a_2^*) - 2\alpha \end{pmatrix}.$$

dove $a_1 \in \mathbb{R}$ e $a_2 \in \mathbb{C}$.

a.2 - Se $\alpha = 0$, allora

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 - 3 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

quindi

$$x_3 = a_3, \quad x_2 = a_3 t + a_2, \quad x_1 = \frac{3}{2}a_3 t^2 + 3(a_2 - 1)t + a_1,$$

con $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

b - I punti di equilibrio del sistema sono le soluzioni di

$$\begin{cases} \alpha\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + \alpha - 3 = 0 \\ \bar{x}_3 + 2\alpha = 0 \\ -\alpha^2\bar{x}_2 = 0. \end{cases}$$

b.1 - Se $\alpha \neq 0$, allora

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{3-\alpha}{\alpha} \\ 0 \\ -2\alpha \end{pmatrix}.$$

Inoltre A è diagonalizzabile e la parte reale dei suoi autovalori è α, 0 e 0, rispettivamente. Quindi $\bar{\mathbf{x}}$ è stabile se e solo se $\alpha \leqslant 0$, ma poichè $\alpha \neq 0$, questa condizione è equivalente a $\alpha < 0$.

b.2 - Se $\alpha = 0$, allora

$$\begin{cases} 3\bar{x}_2 - 3 = 0 \\ \bar{x}_3 = 0 \end{cases}$$

quindi

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è un punto di equilibrio per ogni $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$. Usando la soluzione esplicita

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a_3t^2 + 3(a_2-1)t + a_1 \\ a_3t + a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

vediamo che se $x_3(0) = a_3 \neq 0$ o $x_2(0) = a_2 \neq 1$, allora $\mathbf{x}(t)$ diverge per $t \to \infty$. Inoltre, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $\forall \delta > 0$, $\exists (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) \in \mathbb{R}^3$ tali che $|x_1(0) - \bar{x}_1, x_2(0) - 1, x_3(0)| \leqslant \delta$ e $x_3(0) \neq 0$. Quindi $\bar{\mathbf{x}}$ è instabile.

2. **(12 punti).** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale su $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} = -x^2(1 + 3\log|x|),$$

dove $x^2 \log|x|\,\big|_{x=0}$ va interpretato come uguale a 0.

a. Si determini una costante del moto.
b. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
c. Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
d. Si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi.
e. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, e se ne scriva il periodo nella forma di un integrale definito.
f. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti aperti, e si discuta se esistono o no globalmente.
g. **[Facoltativo.]** Si scelga tra i punti di equilibrio un punto stabile, e si considerino le piccole oscillazioni attorno ad esso: si calcoli il valore limite del periodo nel limite di piccole oscillazioni.

Soluzione:

a - Definiamo

$$U(x) := x^3 \log|x|$$

cosicchè

$$-U'(x) = -(x^2 + 3x^2\log|x|) = \ddot{x}.$$

Un modo di trovare $U(x)$ è di calcolare

$$U(x) = \int_0^x dr\ r^2(1 + 3\log|r|) = -\int_0^x dr\ r^2 + \frac{x^3}{3}(1 + 3\log|x|) = x^3\log|x|.$$

Definiamo l'energia

$$E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x)$$

cosicchè

$$\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}U'(x) = 0.$$

b - I punti critici di U sono

$$x_0 := 0, \quad x_\pm := \pm e^{-1/3}$$

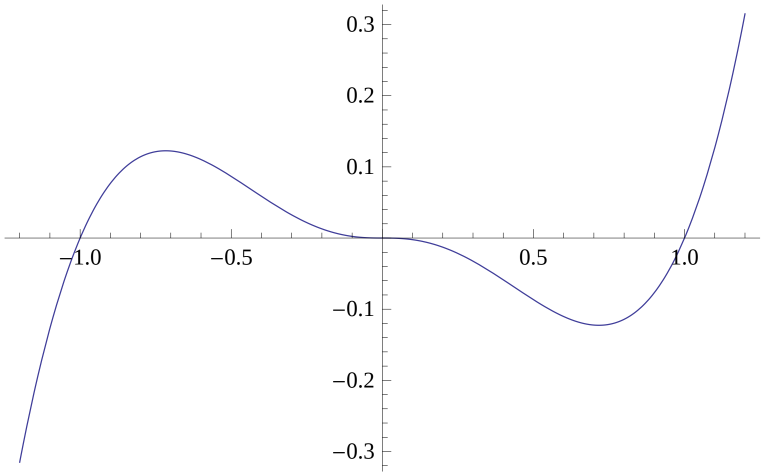
inoltre

$$U(x_0) = 0, \quad U(x_\pm) = \mp\frac{1}{3}e^{-1}, \quad \lim_{x\to-\infty} U(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} U(x) = \infty$$

e

$$U''(x_0) = 0, \quad U''(x_\pm) = \pm 3e^{-1/3}$$

quindi x_- è un massimo e x_+ è un minimo. Inoltre $U(x_-) > U(x_0) > U(x_+)$, quindi $U'(x) \leqslant 0$ per ogni $x \in [x_-, x_+]$ e x_0 è un punto di flesso. Il grafico di $U(x)$ è



c - I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici di U quindi

$$x_0 := 0, \quad x_\pm := \pm e^{-1/3}.$$

x_+ è un minimo isolato, quindi è stabile, x_- è un massimo isolato quindi è instabile. Studiamo la stabilità di x_0. Prendiamo un dato iniziale

$$x(0) = \frac{\delta}{2}, \quad \dot{x}(0) = \frac{\delta}{2}$$

con $\delta > 0$ piccolo, cosicchè

$$E = \frac{\delta^2}{8} + \frac{\delta^3}{8} \log \frac{\delta}{8}.$$

Il tempo per arrivare ad $x(t) = \epsilon > \delta/2$ è

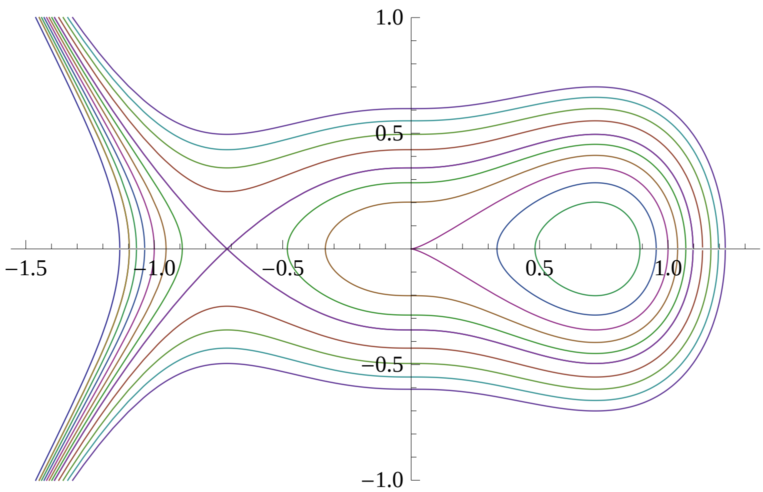
$$\tau(\delta/2, \epsilon) = \int_{\delta/2}^{\epsilon} dx \, \frac{1}{\sqrt{2(\delta^2/8 + \delta^3/8 \log(\delta/2) - x^3 \log|x|)}}$$

e poichè $x \geqslant \delta/2$ e $U'(x) \leqslant 0$,

$$\delta^3/8 \log(\delta/2) \geqslant x^3 \log|x|)$$

quindi $\tau(\delta/2, \epsilon) < \infty$, quindi x_0 è instabile.

d - Usando il grafico di $U(x)$, troviamo le traiettorie nel piano delle fasi:



e - I moti periodici sono quelli dove

$$E \in [U(x_+), U(x_-)) \setminus \{U(x_0)\} = [-e^{-1}/3, e^{-1}/3) \setminus \{0\},$$

e il dato iniziale nelle è t.c. $x(0) > x_-$. Il periodo di questi moti è dato da

$$T = \sqrt{2} \int_{x_a}^{x_b} dx \, \frac{1}{\sqrt{E - x^3 \log |x|}}$$

dove x_a e x_b sono le due soluzioni dell'equazione

$$U(x_{a,b}) = E$$

con la proprietà $x_{a,b} > x_-$.

f - I moti aperti sono quelli dove

$$E > U(x_-) = \frac{e^{-1}}{3}, \quad \text{o} \begin{cases} E < U(x_-) = \frac{e^{-1}}{3} \\ x(0) < x_- = -e^{-1/3} \end{cases} \quad \text{o} \begin{cases} E = U(x_-) = \frac{e^{-1}}{3} \\ x(0) < x_- = -e^{-1/3}. \end{cases}$$

Il tempo per arrivare a $-\infty$ è

$$\tau_{-\infty} = \int_{-\infty}^{x_0} dx \, \frac{1}{\sqrt{2(E - x^3 \log |x|)}}$$

inoltre

$$\sqrt{2(E - x^3 \log |x|)} \underset{x \to -\infty}{\sim} -x^3 \log |x|$$

dove $1/(-x^3 \log |x|)$ è integrabile a $-\infty$ quindi $\tau_{-\infty} < \infty$ e di conseguenza il moto non è definito globalmente.

g - Studiamo le piccole oscilazioni intorno ad x_+: abbiamo

$$U(x_+ + \eta) = U(x_+) + \frac{\eta^2}{2} U''(x_+) + O(\eta^3) = U(x_+) + \frac{3}{2} e^{-1/3} \eta^2 + O(\eta^3)$$

quindi il moto è vicino a quello di un oscillatore armonico con pulsazione $\sqrt{U''(x_+)}$ quindi il periodo delle piccole oscilazioni è

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(x_+)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{1/6}.$$

Per una discussione piu dettagliata di questo argomento, vedere la nota `piccole_oscillazioni.pdf` disponibile online sul sito del corso:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2012/didattica_FM210_2012-13.html`

3. **(6 punti)**. Sia dato il sistema meccanico su $\mathbb{R}^2$:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} U(\mathbf{x})$$

associato alla forza conservativa di energia potenziale $U(\mathbf{x}) = -\cosh x_1 + \cos x_2$ (qui $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ è un punto di $\mathbb{R}^2$).

a. Si determinino i punti di equilibrio del sistema
b. Si enunci la definizione di punto di equilibrio stabile e di punto di equilibrio instabile.
c. Si dimostri la stabilità o instabilità dei punti di equilibrio identificati al punto 1, usando la definizione di stabilità.

Soluzione:

a - I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici di U quindi

$$\begin{cases} -\sinh \bar{x}_1 = 0 \\ -\sin \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

quindi

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = k\pi \text{ per } k \in \mathbb{Z}.$$

b - Un punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ è *stabile* se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che: $\forall (\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)) \in B_\delta(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$ (qui $B_\delta(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$ è la palla di raggio δ centrata in $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$), il moto $\mathbf{x}(t)$ con dato iniziale $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ soddisfa

$$\|(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}(t))\| \leqslant \epsilon$$

$\forall t \geqslant 0$.

$\bar{\mathbf{x}}$ è *instabile* se non è stabile, quindi se $\exists \epsilon > 0$ tale che: $\forall \delta > 0$, $\exists (\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)) \in B_\delta(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$ e $\bar{t} > 0$ tali che

$$\|(\mathbf{x}(\bar{t}) - \bar{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}(\bar{t}))\| > \epsilon \,,$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il moto con dato iniziale $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$.

c - L'equazione del moto è

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \sinh \bar{x}_1 \\ \ddot{x}_2 = \sin \bar{x}_2 \end{cases}$$

che è un sistema di due equazioni disaccoppiate. Se definiamo $V(x_1) := -\cosh(x_1)$, allora la prima equazione si scrive

$$\ddot{x}_1 = -V'(x_1)$$

inoltre $x_1 = 0$ è un massimo isolato di V_1, quindi $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è instabile. Piú esplicitamente, dato $\delta > 0$, consideriamo il dato iniziale

$$x_1(0) = \frac{\delta}{2},\ \dot{x}_1(0) = \frac{\delta}{2},\ x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$$

quindi $x_2(t) = 0$ e il tempo perchè x_1 arrivi in $x_1(t) = \epsilon$ per $\epsilon > 0$ è

$$\tau(\delta/2, \epsilon) = \int_{\delta/2}^{\epsilon} dx_1 \ \frac{1}{\sqrt{2(\delta^2/8 - \cosh(\delta/2) + \cosh(x_1))}}$$

inoltre per $x_1 \geqslant \delta/2$,

$$\cosh(x_1) \geqslant \cosh(\delta/2)$$

quindi $\tau(\delta/2, \epsilon) < \infty$. Se prendiamo ad es $\epsilon = 1/2$, allora $\forall \delta > 0$, scegliamo $(x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0))$ come sopra, e sappiamo che $x_1(\tau(\delta/2, 1)) = 1$, quindi se $\bar{t} = \tau(\delta/2, 1)$ allora

$$\|(x_1(\bar{t}), \dot{x}_1(\bar{t}), x_2(\bar{t}), \dot{x}_2(\bar{t})) - (0, 0, k\pi, 0)\| \geqslant |x_1(\bar{t})| = 1.$$

Quindi $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è instabile.