Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/14

# FM210 - Fisica Matematica I

Primo appello scritto [20-10-2014]

1. **(10 punti).** Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + y + 1 \\ \dot{y} = -\alpha^2 x + 3y - 1 \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Si discuta per quali valori di $\alpha$ il sistema ammette punti di equilibrio. Per tali valori di $\alpha$:

i. si identifichino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità;

ii. si scriva la soluzione generale del sistema.

(b) Si scelga a proprio piacimento un valore di $\alpha$ per cui il sistema non ammette punti di equilibrio e si scriva la soluzione generale del problema corrispondente.

**Soluzione**:

**1 -** Il sistema ammette un punto di equilibrio se e solo se esiste un $(x, y)$ tali che

$$\begin{cases} 0 = \alpha x + y + 1 \\ 0 = -\alpha^2 x + 3y - 1. \end{cases} \tag{1}$$

Quindi se la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha^2 & 3 \end{pmatrix}$$

è invertibile, i.e. se $\alpha(\alpha + 3) \neq 0$, nel qual caso il sistema ammette un unico punto di equilibrio. Se invece $\alpha = 0$ o $\alpha = -3$, è facile verificare che il sistema (1) non ammette nessuna soluzione e quindi non ci sono punti di equilibrio.

**1.a -** Supponiamo che $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -3$. Definiamo $\mathbf{x} := (x, y)$, $\mathbf{b} := (1, -1)$ e

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha^2 & 3 \end{pmatrix}$$

e riscriviamo il sistema lineare come

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

L'unico punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ del sistema è

$$\mathbf{x}_0 = -A^{-1}\mathbf{b} = -\frac{1}{3\alpha + \alpha^2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\alpha + \alpha^2} \begin{pmatrix} -4 \\ -\alpha^2 + \alpha \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di $A$ sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{\alpha + 3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3(\alpha + 3)(1 - \alpha)}.$$

Si noti che per $\alpha > -3$ si ha che $\mathrm{Re}(\lambda_+) > 0$, quindi $\mathbf{x}_0$ è instabile. Se $\alpha < -3$ l'espressione sotto radice è negativa, quindi $\mathrm{Re}(\lambda_\pm) = (3+\alpha)/2 < 0$ e $\mathbf{x}_0$ è stabile.

**1.b -** Definendo $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ il sistema assegnato si può riscrivere nella forma

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}.$$

Iniziamo con il considerare $\alpha \neq 1$, nel qual caso $\lambda_+ \neq \lambda_-$. In questo caso, gli autovettori di $A$ possono essere scelti come

$$\mathbf{v}_\pm := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3-\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3(\alpha+3)(1-\alpha)} \end{pmatrix}$$

e la soluzione generale si può scrivere nella forma

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 = a\mathbf{v}_+ e^{\lambda_+ t} + b\mathbf{v}_- e^{\lambda_- t}$$

dove:

- $a, b$ sono parametri reali arbitrari, nel caso in cui $\mathrm{Im}(\lambda_\pm) = 0$, i.e., $-3 < \alpha < 1$;
- $a$ è un parametro complesso arbitrario e $b = a^*$, nel caso in cui $\mathrm{Im}(\lambda_\pm) \neq 0$, i.e., $\alpha < -3$ o $\alpha > 1$.

Consideriamo ora $\alpha = 1$, nel qual caso $\lambda_+ = \lambda_- = 2$ e l'unico autovettore può essere scelto come

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'autovettore generalizzato deve soddisfare

$$(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi può essere scelto come

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definendo $\mathbf{z}(t) = z_1'(t)\mathbf{v}_1 + z_2'(t)\mathbf{v}_2$ e usando che $A\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$ e $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, il problema può riscriversi nella forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{z}_1'\mathbf{v}_1 + \dot{z}_2'\mathbf{v}_2 = A\mathbf{z} = 2z_1'\mathbf{v}_1 + z_2'(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2)\ ,$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \dot{z}_1' = 2z_1' + z_2' \\ \dot{z}_2' = 2z_2' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1'(t) = e^{2t}(a + bt) \\ z_2'(t) = be^{2t} \end{cases}$$

dove $a, b$ sono due parametri reali, corrispondenti ai dati iniziali di $z_1', z_2'$. Tornando alle variabili iniziali troviamo che la soluzione generale nel caso $\alpha = 1$ si può scrivere come

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + e^{2t}(a + bt)\mathbf{v}_1 + be^{2t}\mathbf{v}_2$$

con $a, b$ parameteri reali arbitrari e $\mathbf{x}_0 = (-1, 0)$.

**2 -** Per $\alpha = 0$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 1 \\ \dot{y} = 3y - 1. \end{cases}$$

quindi

$$y(t) = ae^{3t} + \frac{1}{3}$$

e

$$x(t) = \frac{a}{3}e^{3t} + \frac{4}{3}t + b.$$

Per $\alpha = -3$, abbiamo

$$3\dot{x} - \dot{y} = 4$$

quindi

$$y = 3x - 4t + a$$

e

$$\dot{x} = -4t + a + 1$$

quindi

$$x(t) = -2t^2 + (a + 1)t + b$$

e

$$y(t) = -6t^2 + (3a - 1)t + 3b + a.$$

2. **(6 punti).** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale su $(0, +\infty)$

$$\ddot{x} = \frac{\log^2 x - 2 \log x}{x^2},$$

(a) Si determini una costante del moto.
(b) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
(c) Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
(d) Si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi.
(e) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, e se ne scriva il periodo nella forma di un integrale definito.

**Soluzione**:

**1 -** Troviamo un'energia potenziale $U(x)$ tale che

$$\ddot{x} = -U'(x) = \frac{\log^2 x - 2 \log x}{x^2}$$

Integrando il membro di destra troviamo che $U(x)$ può essere scelta come

$$U(x) = \frac{\log^2 x}{x}.$$

L'energia del sistema

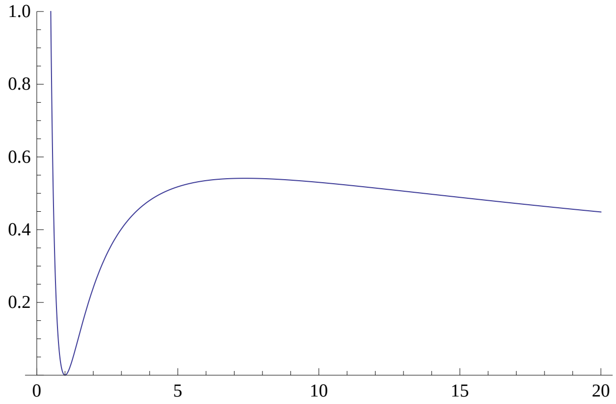
$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x)$$

è una costante del moto.

**2 -** $U(x)$ è sempre '$ge0$ e si annulla solo in $x = 1$. Inoltre $U(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ e $U(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Infine $U'(x) > 0$ se e solo se

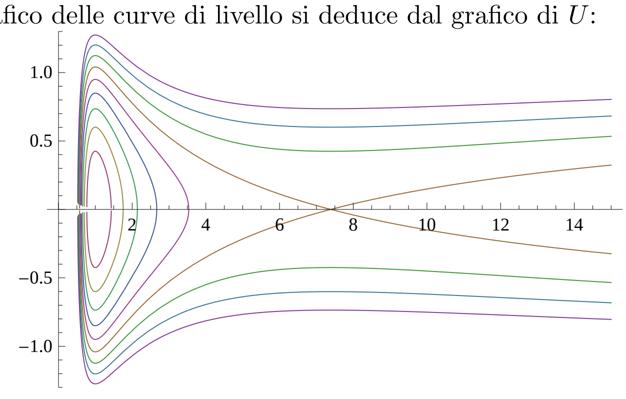
$$\log^2 x > 2 \log x$$

quindi se e solo se $1 < x < e^2$. In conclusione il grafico di $U$ è dalla forma




**3 -** I punti di equilibrio sono i punti critici di $U$, quindi $x_0 = 0$ e $x_1 = e^2$. $x_0$ è un minimo isolato non degenere di $U$, quindi è stabile (per Dirichelet), $x_1$ è un massimo isolato e non degenere, quindi è instabile (per il criterio del linearizzato, come è facile verificare).

**4 -** Il grafico delle curve di livello si deduce dal grafico di $U$:

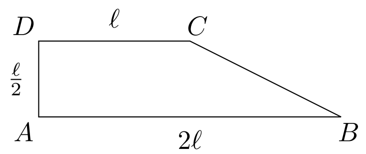



**5 -** Il moto è periodico se e solo se $E < 4e^{-2}$ e $x(0) < e^2$ o $E = 4e^{-2}$ e $x(0) = e^2 = x(t)$. Nel primo caso, chiamiamo $x_-$ e $x_+$ le due soluzioni più piccole di $U(x_\pm) = E$. Il periodo del moto è

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} dx \ \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}} = 2\int_{x_-}^{x_+} dx \ \frac{1}{\sqrt{2(E - \frac{\log^2 x}{x})}}.$$

3. **(6 punti).** Un corpo rigido è costituito da 4 masse puntiformi $m$ disposte ai vertici di un trapezio rettangolo di basi $2\ell$ e $\ell$ e di altezza $\ell/2$.
   (a) Si determini il centro di massa del sistema.
   (b) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di massa, si identifichino gli assi principali di inerzia e si calcolino i momenti di inerzia corrispondenti.

**Soluzione:**




**1 -** Scegliamo un sistema di riferimento centrato in $A$ con asse $x$ orientato come $\vec{AB}$, asse $y$ orientato come $\vec{AD}$ e asse $z$ di conseguenza. In tale sistema di riferimento le coordinate dei vertici del trapezio sono:

$$\mathbf{r}_A = (0,0,0)\ , \qquad \mathbf{r}_B = (2\ell,0,0)\ , \qquad \mathbf{r}_C = (\ell,\ell/2,0)\ , \qquad \mathbf{r}_D = (0,\ell/2,0)\ .$$

In tale sistema di riferimento il centro di massa è quindi

$$\mathbf{r}_{CM} = (3\ell/4,\ell/4,0)\ .$$

Trasliamo il sistema di riferimento originale ricentrandolo nel centro di massa: le coordinate dei vertici del trapezio in questo nuovo sistema di riferimento diventano quindi

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_A = \ell(-3/4,-1/4,0) \\ \mathbf{r}'_B = \ell(5/4,-1/4,0) \\ \mathbf{r}'_C = \ell(1/4,1/4,0) \\ \mathbf{r}'_D = \ell(-3/4,1/4,0) \end{cases}$$

**2 -** La matrice d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di massa è

$$I = m\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

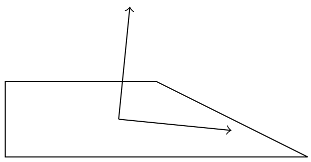
quindi gli assi principali di inerzia sono $\boldsymbol{\xi}_3 = (0,0,1)$ associato al momento d'inerzia $I_3 = 3$ e

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{52+10\sqrt{26}}}(1,5+\sqrt{26},0)\ , \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{52-10\sqrt{26}}}(1,5-\sqrt{26},0)$$

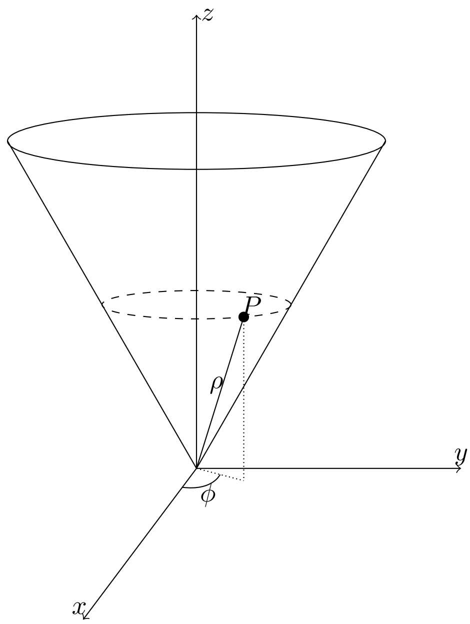
associati ai momenti di inerzia

$$I_1 = m\ell^2(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{26})\ , \qquad I_2 = m\ell^2(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{26})\ .$$

Gli assi $\boldsymbol{\xi}_{1,2}$ sono rappresentati in figura:



4. **(8 punti).** Una massa puntiforme $m$ è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.




   (a) Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate parametriche la distanza $\rho > 0$ dal vertice del cono, e l'angolo azimutale $\phi$, come in figura.

   (b) Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi})$. Si riconosca che $\phi$ è una variabile ciclica.

   (c) Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica $E$ e un secondo integrale primo, che chiameremo $A$, associato alla variabile ciclica $\phi$.

   (d) Usando la conservazione di $A$, si elimini la dipendenza di $\dot{\phi}$ nell'espressione di $E$, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di $A$ nella forma $E = m\dot{\rho}^2/2 + V_{eff}(\rho)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?

(e) Si studi il grafico di $V_{eff}$ e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

(f) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

**Soluzione**:

**1 -** La posizione della particella è data da

$$\mathbf{x}(\rho, \phi) = (\rho \cos\phi \sin\theta_0, \rho \sin\phi \sin\theta_0, \rho \cos\theta_0).$$

**2 -** La velocità della particella è data da

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}(\cos\phi \sin\theta_0, \sin\phi \sin\theta_0, \cos\theta_0) + \dot{\phi}\rho \sin\theta_0(-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

quindi l'energia cinetica è

$$K = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \sin^2\theta_0 \dot{\phi}^2).$$

L'energia potenziale è

$$U = mg\rho\cos\theta_0$$

e quindi la Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\rho, \phi; \dot{\rho}, \dot{\phi}) = K - U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \sin^2\theta_0 \dot{\phi}^2) - mg\rho\cos\theta_0.$$

Si noti che $\mathcal{L}$ è indipendente da $\phi$ (i.e., dipende esplicitamente solo da $\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}$) che, per definizione, vuol dire che $\phi$ è ciclica.

**3 -** Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} = m\rho\sin^2\theta_0\dot{\phi}^2 - mg\cos\theta_0 \\ \dfrac{d}{dt}(m\rho^2\sin^2\theta_0\dot{\phi}) = 0. \end{cases}$$

Oltre all'energia

$$E = K + U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \sin^2\theta_0 \dot{\phi}^2) + mg\rho\cos\theta_0$$

c'è un secondo integrale primo

$$A := m\rho^2\sin^2\theta_0\dot{\phi}$$

**4 -** Usando la definizione di $A$, riscriviamo

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{A^2}{2m\sin^2\theta_0\rho^2} + mg\rho\cos\theta_0 = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho)$$

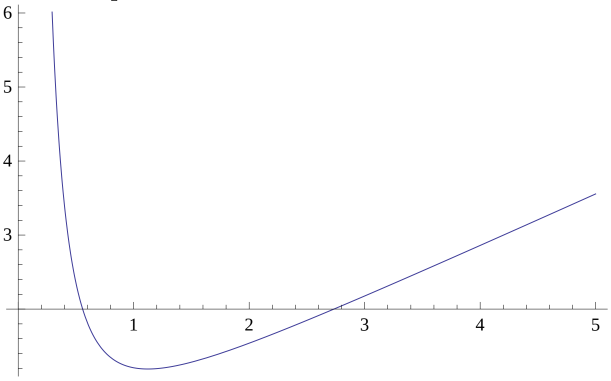
dove

$$V_{eff}(\rho) := \frac{A^2}{2m\sin^2\theta_0\rho^2} + mg\rho\cos\theta_0.$$

**5 -** $V'_{eff}(\rho) > 0$ se e solo se

$$\rho > \left(\frac{A^2}{m^2 g \sin^2\theta_0 \cos\theta_0}\right)^{1/3} =: \rho_0$$

quindi la forma del potenziale è




Dato che $V_{eff}$ ha un unico minimo in $\rho_0$ e $V_{eff}(\rho) \to \infty$ per $\rho \to 0$ e $\rho \to \infty$, allora il moto radiale è periodico per qualsiasi dato iniziale assegnato (in particolare, se $E$ è uguale al minimo di $V_{eff}$ il moto radiale è banale $\rho(t) \equiv \rho_0$).

**6 -** Il moto complessivo può essere periodico o quasi-periodico, a seconda del rapporto tra il periodo del moto radiale e di quello angolare. Se il moto radiale è banale, $\rho(t) \equiv \rho_0$, allora il moto complessivo è periodico, di velocità angolare $\dot\phi = cost. = A/(m\sin^2\theta_0\rho_0^2)$ e di periodo $T = 2\pi m\sin^2\theta_0\rho_0^2/A$. Se $E > V_{eff}(\rho_0)$ allora il moto di $\rho$ è non banale e periodico, di periodo

$$T_\rho = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho\ \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}$$

dove $\rho_\pm$ sono le due radici di $E = V_{eff}(\rho)$. L'incremento di $\phi$ durante un periodo di $\rho$ è

$$\Delta\phi = 2\frac{A}{m\sin^2\theta_0}\int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho\ \frac{1}{\rho^2\sqrt{(\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}.$$

Il moto complessivo è periodico se e solo se $\Delta\phi/(2\pi) \in \mathbb{Q}$, e in questo caso, se $\Delta\phi = (p/q)2\pi$, allora il periodo del moto è $qT_\rho$.

4′. **(8 punti).** (**Appello laureandi**, alternativo all'esercizio 4). Un punto materiale di massa $m = 1$ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = +\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}$$

con $\alpha > 0$ e $\rho$ la distanza del punto dal centro.
Dopo aver scritto l'equazione del moto e determinato gli integrali primi, si discutano i seguenti punti al variare dei parametri $\alpha$ ed $L > 0$, dove $L$ è il modulo del momento angolare del sistema.

(a) Disegnare il grafico del potenziale efficace.

(b) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(c) Identificare, se esistono, le condizioni per cui il moto complessivo del sistema è periodico e calcolare il periodo corrispondente.

(d) Identificare, se esistono, le condizioni per cui la soluzione all'equazione del moto consiste in una caduta verso il centro e verificare se il tempo di caduta è finito o infinito.

**Soluzione**: L'equazione del moto è

$$\ddot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}\Big(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2} - \frac{2\alpha}{|\mathbf{x}|^3}\Big)$$

Gli integrali primi sono l'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 + \frac{1}{|\mathbf{x}|} - \frac{\alpha}{|\mathbf{x}|^2}$$

e il momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}\ .$$

Se $L = |\mathbf{L}| > 0$ allora il moto si svolge sul piano ortogonale a $\mathbf{L}$. In termini delle coordinate polari $(\rho, \theta)$ su questo piano:

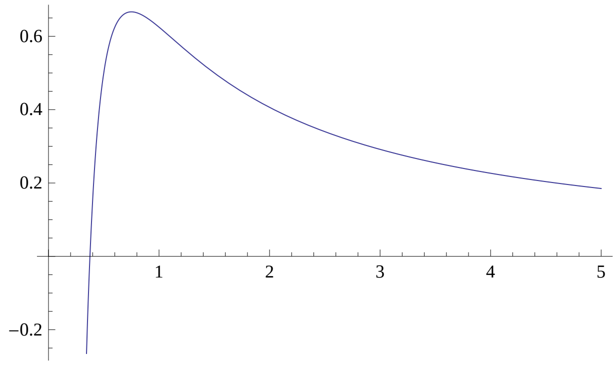
$$E = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho)$$

con

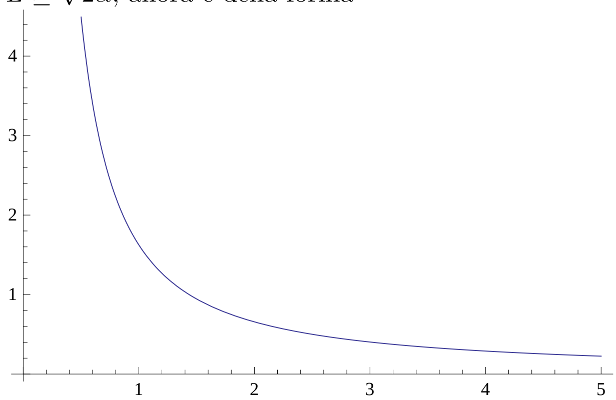
$$V_{eff}(\rho) = \frac{1}{\rho} - \frac{2\alpha - L^2}{2\rho^2}$$

e $L = \rho^2\dot{\theta}$.

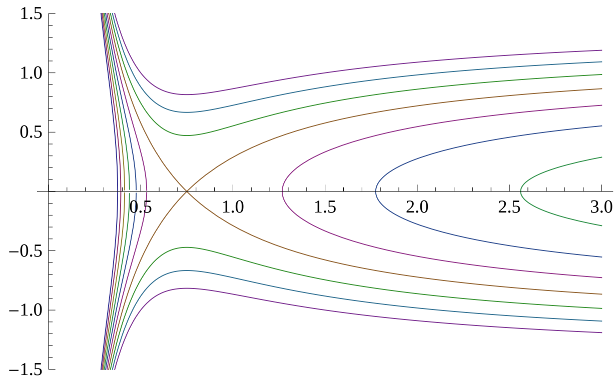
**1 -** Si noti che $V'_{eff}(\rho) > 0$ se e solo se $\rho < 2\alpha - L^2$ quindi se $L < \sqrt{2\alpha}$, allora il potenziale è della forma



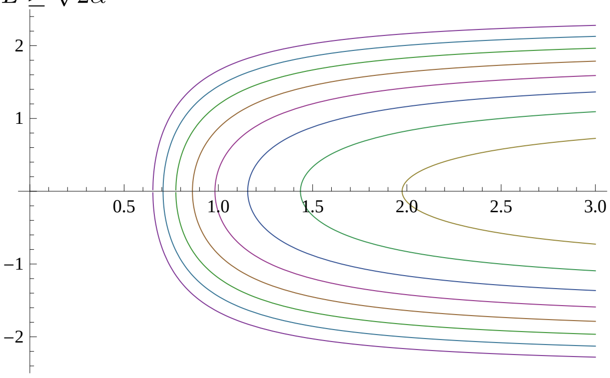

mentre se $L \geq \sqrt{2\alpha}$, allora è della forma




**2 -** Dal grafico di $V_{eff}$ si deduce la forma delle orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$: se $L < \sqrt{2\alpha}$



mentre se $L \geq \sqrt{2\alpha}$




**3 -** Il moto radiale è periodico se e solo se $L < \sqrt{2\alpha}$ e $\rho(0) = 2\alpha - L^2 = \rho(t)$ (nel qual caso è periodico banalmente, dato che il moto radiale è costante). In questo caso

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\rho^2} = \frac{L}{(2\alpha - L^2)^2} = costante$$

quindi il periodo del moto complessivo è

$$T = \frac{2\pi(2\alpha - L^2)^2}{L}.$$

**4 -** Il moto può cadere verso il centro se e solo se $L < \sqrt{2\alpha}$; in tal caso i moti che cadono sul centro sono quelli a energia minore o uguale del massimo, con $\rho(0) < 2\alpha - L^2$, oppure tutti quelli a energia maggiore del massimo. Prendiamo ad es un moto con energia minore del massimo e $\rho(0) < 2\alpha - L^2$ coincidente con il punto di inversione $\rho_+$. In questo caso, il tempo necessario per arrivare a 0 è

$$\tau_0 = \int_0^{\rho_+} d\rho \, \frac{1}{\sqrt{2(E - \frac{1}{\rho} + \frac{2\alpha - L^2}{2\rho^2})}}.$$

Per $\rho \to 0^+$ la funzione integranda si comporta come

$$\frac{1}{\sqrt{2(E - \frac{1}{\rho} + \frac{2\alpha - L^2}{2\rho^2})}} \underset{\rho \to 0}{\sim} \frac{\rho}{\sqrt{\alpha - \frac{L^2}{2}}}$$

che è integrabile in 0. Quindi $\tau_0 < \infty$ e quindi il moto non è definito globalmente.