Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/14

FM210 - Fisica Matematica I

Primo appello scritto [20-10-2014]

1. **(10 punti).** Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + y + 1 \\ \dot{y} = -\alpha^2 x + 3y - 1 \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Si discuta per quali valori di α il sistema ammette punti di equilibrio. Per tali valori di α:

      i. si identifichino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità;

      ii. si scriva la soluzione generale del sistema.

   (b) Si scelga a proprio piacimento un valore di α per cui il sistema non ammette punti di equilibrio e si scriva la soluzione generale del problema corrispondente.

2. **(6 punti).** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale su $(0, +\infty)$

$$\ddot{x} = \frac{\log^2 x - 2\log x}{x^2},$$

   (a) Si determini una costante del moto.

   (b) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.

   (c) Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

   (d) Si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi.

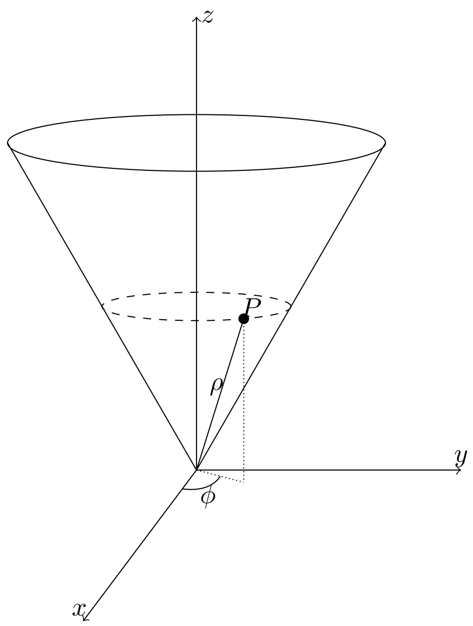
   (e) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, e se ne scriva il periodo nella forma di un integrale definito.

3. **(6 punti).** Un corpo rigido è costituito da 4 masse puntiformi m disposte ai vertici di un trapezio rettangolo di basi 2ℓ e ℓ e di altezza $\ell/2$.

   (a) Si determini il centro di massa del sistema.

   (b) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di massa, si identifichino gli assi principali di inerzia e si calcolino i momenti di inerzia corrispondenti.

4. **(8 punti).** Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.



(a) Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate parametriche la distanza $\rho > 0$ dal vertice del cono, e l'angolo azimutale ϕ, come in figura.

(b) Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi})$. Si riconosca che ϕ è una variabile ciclica.

(c) Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e un secondo integrale primo, che chiameremo A, associato alla variabile ciclica ϕ.

(d) Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot{\phi}$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = m\dot{\rho}^2/2 + V_{eff}(\rho)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?

(e) Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

(f) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

4′. **(8 punti).** (**Appello laureandi**, alternativo all'esercizio 4). Un punto materiale di massa $m = 1$ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = +\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}$$

con $\alpha > 0$ e ρ la distanza del punto dal centro.
Dopo aver scritto l'equazione del moto e determinato gli integrali primi, si discutano i seguenti punti al variare dei parametri α ed $L > 0$, dove L è il modulo del momento angolare del sistema.

(a) Disegnare il grafico del potenziale efficace.

(b) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(c) Identificare, se esistono, le condizioni per cui il moto complessivo del sistema è periodico e calcolare il periodo corrispondente.

(d) Identificare, se esistono, le condizioni per cui la soluzione all'equazione del moto consiste in una caduta verso il centro e verificare se il tempo di caduta è finito o infinito.