

FM210 - FISICA MATEMATICA I

APPELLO SCRITTO ESTIVO [4-6-2014]

1. **(10 punti)**. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \alpha y \\ \dot{y} = \alpha^2 x + 4y + \alpha + 1 \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Si discuta per quali valori di α il sistema ammette punti di equilibrio. Per tali valori di α si identifichino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
 - (b) Si scelga a proprio piacimento un valore di α per cui il sistema ammette punti di equilibrio e si scriva la soluzione generale del problema corrispondente.
 - (c) Come al punto precedente, per un valore di α per cui il sistema *non* ammette punti di equilibrio.
2. **(7 punti)**. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale su $(-\infty, +\infty)$

$$\ddot{x} = -4\pi x e^{-x^2} \cos(2\pi e^{-x^2})$$

- (a) Si determini una costante del moto.
 - (b) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
 - (c) Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
 - (d) Si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi.
 - (e) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, e se ne scriva il periodo nella forma di un integrale definito.
 - (f) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti aperti, e si discuta se le soluzioni corrispondenti sono globali o no.
3. **(4 punti)**. Un corpo rigido è costituito da una barretta omogenea di sezione trascurabile di lunghezza ℓ e densità lineare $\lambda = \ell/m$, ai cui estremi sono fissate due masse puntiformi di massa $2m$ e $3m$, rispettivamente.
- (a) Si determini il centro di massa del sistema.
 - (b) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di massa, si identifichino gli assi principali di inerzia e si calcolino i momenti di inerzia corrispondenti.

4. **(9 punti)**. Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di equazione cartesiana $z = -\ell e^{-(x^2+y^2)/\ell^2}$, dove ℓ è una costante positiva.
- (a) Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate polari sul piano orizzontale, i.e., usando coordinate ρ, θ tali che $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$.
 - (b) Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta})$. Si riconosca che θ è una variabile ciclica.
 - (c) Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e un secondo integrale primo, che chiameremo A , associato alla variabile ciclica θ .
 - (d) Usando la conservazione di A , si elimini la dipendenza di $\dot{\theta}$ nell'espressione di E , e si esprima così l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = m\dot{\rho}^2 K(\rho)/2 + V_{eff}(\rho)$ con $K(\rho) > 0$: qual è l'espressione della funzione $K(\rho)$ e del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?
 - (e) Si ricavi l'equazione delle traiettorie della coordinata radiale nel piano delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$. Si studi il grafico di V_{eff} al variare di E e di A e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.
 - (f) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.