Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/14

FM210 - Fisica Matematica I

Appello scritto estivo [4-6-2014]

1. (10 punti). Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \alpha y \\ \dot{y} = \alpha^2 x + 4y + \alpha + 1 \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si discuta per quali valori di α il sistema ammette punti di equilibrio. Per tali valori di α si identifichino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
2. Si scelga a proprio piacimento un valore di α per cui il sistema ammette punti di equilibrio e si scriva la soluzione generale del problema corrispondente.
3. Come al punto precedente, per un valore di α per cui il sistema *non* ammette punti di equilibrio.

Soluzione: Sia

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{x} := (x, y)$, cosicché l'equazione si può riscrivere come

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

1-1 - Il determinante di A è

$$\det A = \alpha(4 - \alpha^2)$$

quindi A è invertibile se e solo se $\alpha \neq 0, \pm 2$. In questo caso, c'è un unico punto di equilibrio

$$\bar{\mathbf{x}} = -A^{-1}\mathbf{b} = -\frac{1}{\alpha(4-\alpha^2)} \begin{pmatrix} 4 & -\alpha \\ -\alpha^2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha + 1}{4 - \alpha^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se invece $\alpha = 0$, allora ci sono ∞^1 punti di equilibrio, della forma

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -1/4 \end{pmatrix}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha = \pm 2$, allora non ci sono punti di equilibrio.

1-2 - La traccia (la somma degli autovalori) e il determinante di A (il prodotto degli autovalori) sono

$$\mathrm{Tr} A = 4 + \alpha, \quad \det A = \alpha(4 - \alpha^2)$$

quindi se $\alpha < -4$ allora $\mathrm{Tr}A < 0$ e $\det A > 0$, dunque la parte reale dei due autovalori di A è negativa, quindi il punto di equilibrio è stabile. Se invece $\alpha > -4$, allora $\mathrm{Tr}\, A > 0$ dunque almeno uno degli autovalori di A ha una parte reale positiva, quindi i punti di equilibrio sono instabili. Se $\alpha = -4$, allora $\mathrm{Tr}\, A = 0$ e $\det A > 0$ quindi gli autovalori sono opposti, immaginari e diversi da 0, quindi il punto di equilibrio è stabile.

2 - Un valore di α per cui il sistema ammette punti fissi e il calcolo della soluzione generale dell'equazione è particolarmente semplice è $\alpha = 0$. In questo caso, l'equazione si scrive

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 4y + 1 \end{cases}$$

e quindi la soluzione generale è

$$x = a, \quad y = be^{4t} - \frac{1}{4}$$

per $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3 - Prendiamo $\alpha = -2$. L'equazione si scrive

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x + y) \\ \dot{y} = 4(x + y) - 1 \end{cases}$$

quindi

$$\frac{d}{dt}(x + y) = 2(x + y) - 1$$

cosicché

$$x + y = ae^{2t} + \frac{1}{2}.$$

per $a \in \mathbb{R}$. Segue che

$$\dot{x} = -2ae^{2t} - 1$$

quindi

$$x = -ae^{2t} - t + b$$

per $b \in \mathbb{R}$, e

$$y = (x + y) - x = 2ae^{2t} + t - b + \frac{1}{2}.$$

2. (7 punti). Si consideri il sistema meccanico unidimensionale su $(-\infty, +\infty)$

$$\ddot{x} = -4\pi x e^{-x^2} \cos(2\pi e^{-x^2})$$

1. Si determini una costante del moto.
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
3. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
4. Si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi.

5. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, e se ne scriva il periodo nella forma di un integrale definito.
6. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti aperti, e si discuta se le soluzioni corrispondenti sono globali o no.

Soluzione:

1 - Notiamo che

$$-4\pi x e^{-x^2}\cos(2\pi e^{-x^2}) = -\frac{d}{dx}(-\sin(2\pi e^{-x^2}))$$

quindi se

$$U(x) := -\sin(2\pi e^{-x^2})$$

allora

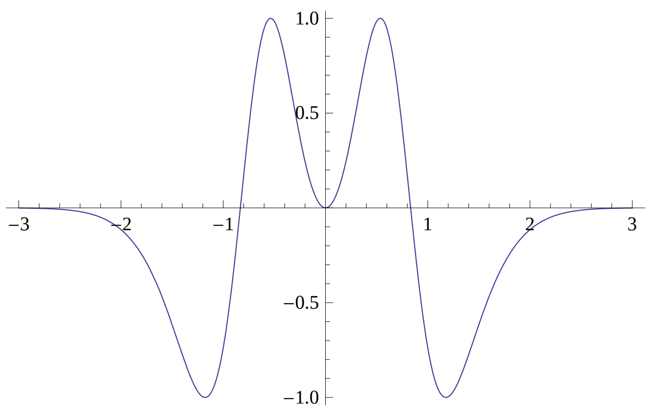
$$E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x)$$

è una quantità conservata.

2 - Studiamo $U(x)$ su $x \in [0, \infty)$, e completiamo il grafico usando $U(-x) = U(x)$. Il segno di $U'(x)$ è determinato da $2\pi e^{-x^2}$.

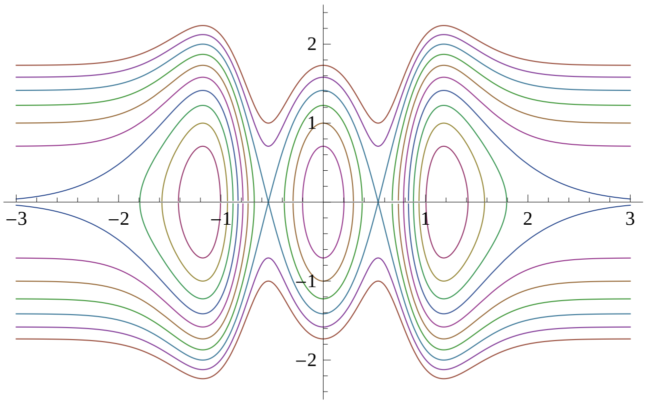
- Se $x \in \left(0, \sqrt{\log(4/3)}\right)$, allora $2\pi e^{-x^2} \in (3\pi/2, 2\pi)$ quindi $U'(x) > 0$.
- Se $x \in \left(\sqrt{\log(4/3)}, \sqrt{\log 4}\right)$, allora $2\pi e^{-x^2} \in (\pi/2, 3\pi/2)$ quindi $U'(x) < 0$.
- Se $x \in (\sqrt{\log 4}, \infty)$, allora $2\pi e^{-x^2} \in (0, \pi/2)$ quindi $U'(x) > 0$.

Il grafico di $U(x)$ è



3 - I punti di equilibrio sono i punti critici di U, cioè $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{x}_1^{(\pm)} = \pm\sqrt{\log(4/3)}$ e $\bar{x}_2^{(\pm)} = \pm\sqrt{\log 4}$. I punti $\bar{x}_1^{(\pm)}$ sono massimi locali di U, quindi sono instabili. Invece $\bar{x}_2^{(\pm)}$ e $\bar{x}_0$, essendo minimi locali di U, sono stabili.

4 - Le traiettorie nel piano delle fasi seguono dal grafico di U e hanno la seguente forma:



5 - I dati iniziali corrispondenti a moti periodici non banali sono quelli con $[E < 0]$ o $[0 < E < 1$ e $|x(0)| < \sqrt{\log(4/3)}]$. Il periodo del moto è

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} dx \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}}.$$

dove, nel caso in cui $E < 0$, x_- e x_+ sono le due soluzioni positive di $U(x) = E$; invece, nel caso $0 < E < 1$ e $|x(0)| < \sqrt{\log(4/3)}$, abbiamo che $x_- = -x_+$ con x_+ la piú piccola radice positiva di $U(x) = E$.

5 - I dati iniziali corrispondenti a moti aperti sono quelli con $[0 \leq E < 1$ e $|x(0)| > \sqrt{\log(4/3)}]$ o $[E = 1$ e $|x(0)| \neq \sqrt{\log(4/3)}]$ o $[E > 1]$. L'energia potenziale è limitata dal basso, quindi il moto è definito globalmente.

3. (4 punti). Un corpo rigido è costituito da una barretta omogenea di sezione trascurabile di lunghezza ℓ e densità lineare $\lambda = \ell/m$, ai cui estremi sono fissate due masse puntiformi di massa $2m$ e $3m$, rispettivamente.

1. Si determini il centro di massa del sistema.
2. Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di massa, si identifichino gli assi principali di inerzia e si calcolino i momenti di inerzia corrispondenti.

Soluzione:

1 - Consideriamo un sistema di coordinate tali che la barretta sia diretta lungo l'asso z, la massa $2m$ sia in $(0, 0, 0)$ e la massa $3m$ in $(0, 0, \ell)$. Il centro di massa della barretta senza le due masse è situato in $(0, 0, \ell/2)$, quindi il centro di massa del sistema è lo stesso di un sistema di tre masse puntiformi di masse $2m$, m e $3m$ posizionate rispettivamente in $(0, 0, 0)$, $(0, 0, \ell/2)$ e $(0, 0, \ell)$. Quindi la posizione del centro di massa è

$$\left(0, 0, \frac{7}{12}\ell\right).$$

2 - Abbiamo

$$\int_0^\ell dz\lambda\left(z - \frac{7}{12}\ell\right)^2 = m\ell^2\frac{13}{144}$$

quindi la matrice d'inerzia del sistema è

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$I_1 = I_2 = m\ell^2\Big(\frac{13}{144} + \frac{2*49}{144} + \frac{3*25}{144}\Big) = m\ell^2\frac{31}{24}$$

Gli assi principali di inerzia sono quindi l'asse z (con momento 0) e tutti gli assi del piano (x, y) (con momento $m\ell^2 31/24$).

4. (9 punti). Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di equazione cartesiana $z = -\ell e^{-(x^2+y^2)/\ell^2}$, dove ℓ è una costante positiva.

1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate polari sul piano orizzontale, i.e., usando coordinate ρ, θ tali che $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$.
2. Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \theta, \dot\rho, \dot\theta)$. Si riconosca che θ è una variabile ciclica.
3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e un secondo integrale primo, che chiameremo A, associato alla variabile ciclica θ.
4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot\theta$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot\rho$ e di A nella forma $E = m\dot\rho^2 K(\rho)/2 + V_{eff}(\rho)$ con $K(\rho) > 0$: qual è l'espressione della funzione $K(\rho)$ e del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?
5. Si ricavi l'equazione delle traiettorie della coordinata radiale nel piano delle fasi $(\rho, \dot\rho)$. Si studi il grafico di V_{eff} al variare di E e di A e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.
6. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

Soluzione

1 - In coordinate polari, il vincolo si scrive

$$z = -\ell e^{-\rho^2/\ell^2}.$$

2 - La velocità è data da

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta \\ \dot\rho\sin\theta + \rho\dot\theta\cos\theta \\ 2\dot\rho\rho e^{-\rho^2/\ell^2}/\ell \end{pmatrix}$$

quindi la Lagrangiana è

$$L(\rho,\theta;\dot\rho,\dot\theta) = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2) + 2m\dot\rho^2\frac{\rho^2}{\ell^2}e^{-2\rho^2/\ell^2} + mg\ell e^{-\rho^2/\ell^2}.$$

La Lagrangiana è indipendente da θ, quindi θ è una variabile ciclica.

3 - Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot\rho\left(1 + 4\dfrac{\rho^2}{\ell^2}e^{-2\rho^2/\ell^2}\right) = m\rho\dot\theta^2 - 4m\dot\rho^2\dfrac{\rho}{\ell^2}e^{-2\rho^2/\ell^2}\left(1 - 2\dfrac{\rho^2}{\ell^2}\right) - 2mg\dfrac{\rho}{\ell}e^{-\rho^2/\ell^2} \\ \dfrac{d}{dt}(m\rho^2\dot\theta) = 0 \end{cases}$$

L'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2) + 2m\dot\rho^2\frac{\rho^2}{\ell^2}e^{-2\rho^2/\ell^2} - mg\ell e^{-\rho^2/\ell^2}$$

e

$$A := m\rho^2\dot\theta$$

sono due grandezze conservate.

4 - L'energia si scrive

$$E = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{A^2}{2m\rho^2} + 2m\dot\rho^2\frac{\rho^2}{\ell^2}e^{-2\rho^2/\ell^2} - mg\ell e^{-\rho^2/\ell^2} = \frac{1}{2}m\dot\rho^2K(\rho) + V_{eff}(\rho)$$

dove

$$K(\rho) := 1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2}e^{-2\rho^2/\ell^2} > 0$$

e

$$V_{eff}(\rho) := \frac{A^2}{2m\rho^2} - mg\ell e^{-\rho^2/\ell^2}.$$

5 - Dall'espressione dell'energia si trova

$$\dot\rho = \pm\sqrt{\frac{2(E - V_{eff}(\rho))}{mK(\rho)}}.$$

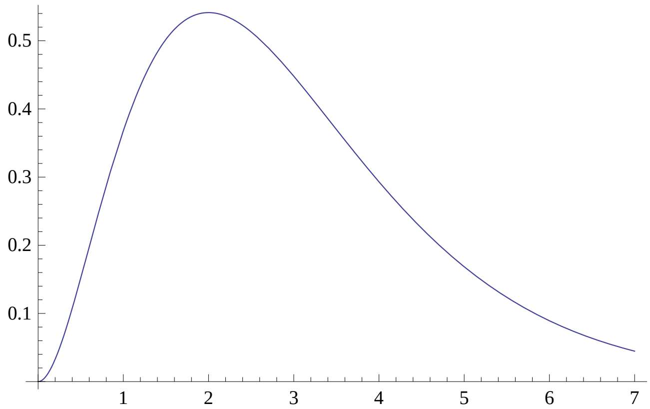
Abbiamo

$$V'_{eff}(\rho) = -\frac{A^2}{m\rho^3} + 2mg\frac{\rho}{\ell}e^{-\rho^2/\ell^2}$$

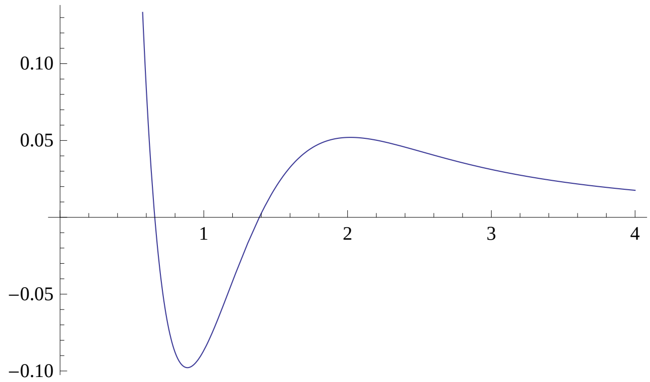
quindi $V'_{eff} > 0$ se e solo se

$$\left(\frac{\rho^2}{\ell^2}\right)^2 e^{-\rho^2/\ell^2} > \frac{A^2}{2m^2 g\ell^3}.$$

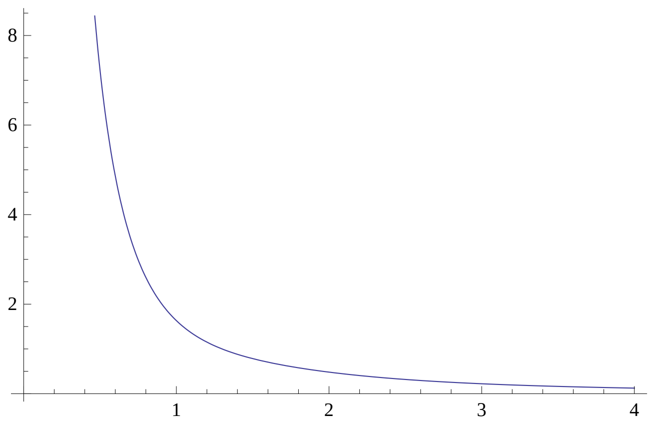
Il grafico di $x^2 e^{-x}$ è



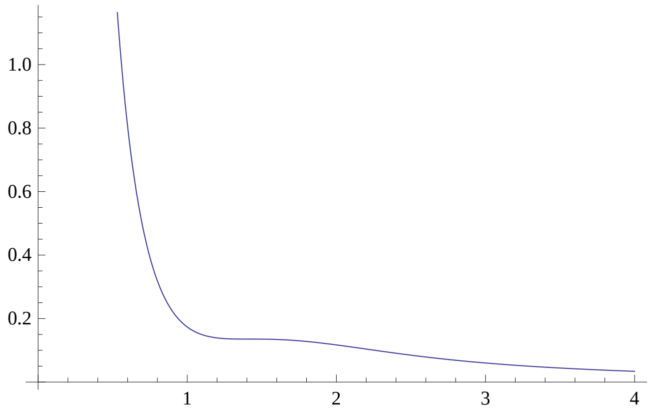
ed il suo massimo è $4e^{-2}$, quindi se $A^2/(2m^2 g\ell^3) < 4e^{-2}$ allora il grafico di V_{eff} è dalla forma



se $A^2/(2m^2 g\ell^3) > 4e^{-2}$ allora il grafico di V_{eff} è dalla forma



e se $A^2/(2m^2g\ell^3) = 4e^{-2}$ allora il grafico di V_{eff} è dalla forma



- Se $A^2/(2m^2g\ell^3) < 4e^{-2}$ e $E < 0$ allora il moto radiale è periodico. Se invece $E > V_2$ dove V_2 è il valore del massimo locale di V_{eff}, allora il moto radiale è aperto. Se $0 \leqslant E < V_2$ e $\rho(0) < \rho_2$ dove $V_{eff}(\rho_2) = V_2$ e $V'_{eff}(\rho_2) = 0$, allora il moto radiale è periodico. Se $\rho(0) = \rho_2$ e $\dot{\rho}(0) = 0$, è costante. Negli altri casi, è aperto.
- Se $A^2/(2m^2g\ell^3) > 4e^{-2}$ allora il moto radiale è aperto.
- Se $A^2/(2m^2g\ell^3) = 4e^{-2}$ allora il moto radiale è aperto eccetto nel caso in cui $\rho(0) = \sqrt{2}\ell$ e $\dot{\rho}(0) = 0$ per cui il moto radiale è costante.

6 - Se il moto radiale è periodico di periodo

$$T_\rho = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho \sqrt{\frac{mK(\rho)}{2(E - V_{eff}(\rho))}}$$

allora il moto complessivo è periodico se e solo se

$$\Delta\theta := 2\int_{\rho_-}^{\rho^+} d\rho \frac{A}{\rho^2}\sqrt{\frac{K(\rho)}{2m(E - V_{eff}(\rho))}}$$

è tale che

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

In questo caso, il periodo del moto complessivo è qT_ρ. Se il moto radiale è costante, il moto complessivo è periodico di periodo $2\pi m\rho^2/A$.