

FM210 - FISICA MATEMATICA I

APPELLO SCRITTO DI SETTEMBRE [10-9-2014]

1. **(8 punti)**. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha z \\ \dot{y} = x + \alpha + 1 \\ \dot{z} = y - (\alpha + 1)z - 3 \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Si discuta per quali valori di α il sistema ammette un unico punto di equilibrio (pde). Per tali valori di α , si studi la stabilità del pde.
- (b) Si scelga un valore di α per cui il sistema *non* ammette un unico pde e si scriva la soluzione generale del problema corrispondente.
2. **(8 punti)**. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale su \mathbb{R}

$$\ddot{x} = -e^x(x^3 - x^2 - 4x + 4)$$

- (a) Si determini una costante del moto.
- (b) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
- (c) Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
- (d) Si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi.
- (e) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, e se ne scriva il periodo nella forma di un integrale definito.
- (f) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti aperti, e si discuta se le soluzioni corrispondenti sono globali o no.
3. **(4 punti)**. Un corpo rigido è costituito da 3 masse puntiformi m disposte ai vertici di un triangolo ABC . Siano: ℓ la lunghezza del lato BC , 3ℓ la lunghezza del lato AC e $5\pi/6$ l'ampiezza dell'angolo al vertice C .
- (a) Si determini il centro di massa del sistema.
- (b) Si calcoli la matrice del corpo rispetto al suo centro di massa. Si discuta come identificare gli assi principali di inerzia e i momenti di inerzia corrispondenti (senza svolgere i calcoli).

4. **(10 punti)**. Una massa puntiforme m si muove su una guida liscia di equazione $y = de^{-x/d}$ (con $d > 0$) appartenente al piano verticale x - y sotto l'effetto della forza peso $\mathbf{F}_p = m(0, -g)$ e di una forza elastica $\mathbf{F}_e = -k(x, y)$ di costante elastica k e centro coincidente con l'origine.
- (a) Si scriva la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane le variabili (x, \dot{x}) .
 - (b) Si ricavi la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange.
 - (c) Si identifichi una grandezza conservata, e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
 - (d) Si determini quanti sono i punti di equilibrio del sistema, li si identifichino (eventualmente come soluzione di un'opportuna equazione) e se ne studi la stabilità.
 - (e) Si ricavi l'equazione delle curve di livello del sistema e se ne disegni il grafico nel piano delle fasi (x, \dot{x}) al variare della grandezza conservata di cui sopra. Si discuta qualitativamente la natura del moto.