Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/14

FM210 - Fisica Matematica I

Appello scritto di settembre [10-9-2014]

1. **(8 punti).** Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha z \\ \dot{y} = x + \alpha + 1 \\ \dot{z} = y - (\alpha + 1)z - 3 \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si discuta per quali valori di α il sistema ammette un unico punto di equilibrio (pde). Per tali valori di α, si studi la stabilità del pde.
2. Si scelga un valore di α per cui il sistema *non* ammette un unico pde e si scriva la soluzione generale del problema corrispondente.

Soluzione: Siano

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(\alpha+1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

cosicché il sistema si possa riscrivere equivalentemente nella forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

1 - $\det A = \alpha$ quindi il sistema ammette un unico pde se e solo se $\alpha \neq 0$. Se $\alpha = 0$, allora (x_0, y_0, z_0) è un pde se e solo se $x_0 = -1$ e $y_0 = z_0 + 3$, quindi in questo caso il sistema ammette una retta di pde. Supponiamo che $\alpha \neq 0$; il sistema è stabile se e solo se le parti reali degli autovalori di A sono tutti ≤ 0. Gli autovalori di A sono le soluzioni di

$$-X^3 - X^2(\alpha + 1) + \alpha = (X + 1)(-X^2 - \alpha X + \alpha) = 0$$

cioè

$$\left\{ -1, -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}, -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} \right\}.$$

Inoltre, se $\alpha > 0$, allora $-\alpha/2 + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}/2 > 0$, se $\alpha < 0$, allora $\mathcal{R}e(-\alpha/2 - \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}/2) > 0$. In conclusione, il pde è instabile, $\forall \alpha \neq 0$.

2 - Fissiamo $\alpha = 0$. In questo caso, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = x + 1 \\ \dot{z} = y - z - 3 \end{cases}$$

Le prime due equazioni sono risolte da

$$x = a, \quad y = (a+1)t + b$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ due costanti arbitrarie. Sostituendo tale soluzione nella terza troviamo:

$$\dot{z} = -z + (a+1)t + b - 3$$

che è risolta da

$$z = ce^{-t} + (a+1)(t-1) + b - 3.$$

con $c \in \mathbb{R}$ una terza costante arbitraria.

2. **(8 punti).** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale su $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} = -e^x(x^3 - x^2 - 4x + 4)$$

1. Si determini una costante del moto.
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
3. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
4. Si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi.
5. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, e se ne scriva il periodo nella forma di un integrale definito.
6. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti aperti, e si discuta se le soluzioni corrispondenti sono globali o no.

Soluzione:

1 - Come si verifica facilmente,

$$-e^x(x^3 - x^2 - 4x + 4) = -\frac{d}{dx}(e^x(x^3 - 4x^2 + 4x)) =: -\frac{dV}{dx}$$

quindi l'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$$

con

$$V(x) = e^x(x^3 - 4x^2 + 4x)$$

è una costante del moto.

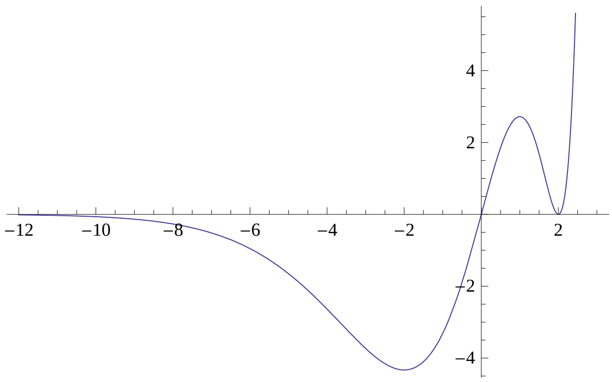
2 - Dato che

$$V'(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x+2)(x-2),$$

allora $V'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-2, 1) \cup (2, \infty)$. Inoltre

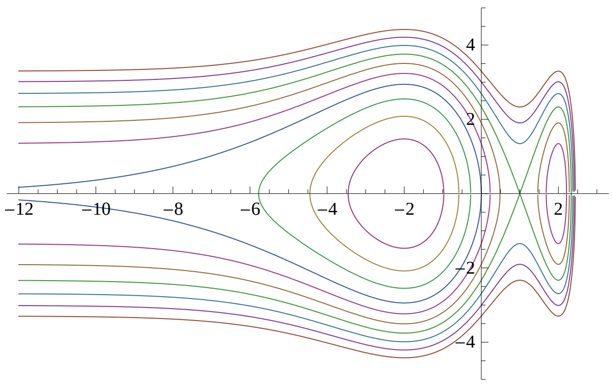
$$V(-2) = -32e^{-2}, \quad V(1) = e, \quad V(2) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} V(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} V(x) = 0$$

quindi il grafico di V è (tenendo anche conto che V è negativa se e solo se $x < 0$):



3 - I punti di equilibrio sono i punti critici di V, cioè $\{-2, 1, 2\}$. I punti di equilibrio stabili sono i minimi di V, cioè $\{-2, 2\}$, ed i punti di equilibrio instabili sono i massimi di V, cioè $\{1\}$.

4 - Le curve di livello si deducono del grafico del potenziale:



5 - I moti periodici non banali sono quelli con $E < 0$ e quelli con $0 < E < e$ e $x(0) > 1$. Il loro periodo è

$$\int_{x_-}^{x_+} dx \ \frac{1}{\sqrt{2(E - V(x)}}$$

dove x_- e x_+ sono le soluzioni di $V(x) = E$ (piú precisamente, se $0 < E < e$, $x_\pm$ sono le due soluzioni di $V(x) = E$ a destra di 1).

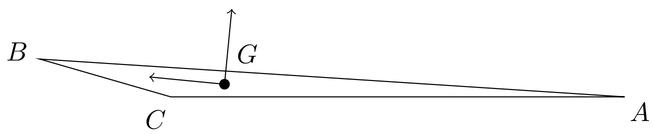
6 - I moti aperti sono quelli con $E \geqslant 0$ e $x(0) < 1$, quelli con $E > e$, e quelli con $E = e$ e $x(0) < 1$. Tutti i moti esistono globalmente, poiché il potenziale $V(x)$ è limitato dal basso.

3. **(4 punti).** Un corpo rigido è costituito da 3 masse puntiformi m disposte ai vertici di un triangolo ABC. Siano: ℓ la lunghezza del lato BC, 3ℓ la lunghezza del lato AC e $5\pi/6$ l'ampiezza dell'angolo al vertice C.

1. Si determini il centro di massa del sistema.
2. Si calcoli la matrice del corpo rispetto al suo centro di massa. Si discuta come identificare gli assi principali di inerzia e i momenti di inerzia corrispondenti (senza svolgere i calcoli).

Soluzione: Prendiamo un sistema di riferimento centrato in C con l'asse x diretto verso A. Le coordinate di A, B e C sono

$$\mathbf{x}_A = \ell(3,0,0), \quad \mathbf{x}_B = \ell\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \mathbf{x}_C = (0,0,0).$$



1 - Le coordinate del centro di massa sono

$$\mathbf{x}_G = \frac{\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_C}{3} = \ell\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{6}, 0\right).$$

Le coordinate di A, B e C rispetto al centro di massa sono

$$\mathbf{y}_A = \ell\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right), \quad \mathbf{y}_B = \ell\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad \mathbf{y}_C = \ell\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right).$$

2 - La matrice d'inerzia del sistema è

$$I = m\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{13}{2} + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Gli assi principali di inerzia sono gli autovettori di I, e i momenti di inerzia sono gli autovalori corrispondenti. Uno degli assi principali d'inerzia è diretto lungo l'asse z, con il momento di inerzia $m\ell^2(20/3 + \sqrt{3})$. Gli altri due sono nel piano (x, y), orientati come in figura.

4. **(10 punti).** Una massa puntiforme m si muove su una guida liscia di equazione $y = de^{-x/d}$ (con $d > 0$) appartenente al piano verticale x-y sotto l'effetto della forza peso $\mathbf{F}_p = m(0, -g)$ e di una forza elastica $\mathbf{F}_e = -k(x, y)$ di costante elastica k e centro coincidente con l'origine.

1. Si scriva la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(x, \dot{x})$.
2. Si ricavi la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange.
3. Si identifichi una grandezza conservata, e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
4. Si determini quanti sono i punti di equilibrio del sistema, li si identifichino (eventualmente come soluzione di un'opportuna equazione) e se ne studi la stabilità.
5. Si ricavi l'equazione delle curve di livello del sistema e se ne disegni il grafico nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$ al variare della grandezza conservata di cui sopra. Si discuta qualitativamente la natura del moto.

Soluzione:

1 - La velocità della particella nelle coordinate adattate al vincolo ($\mathbf{x} = (x, de^{-x/d})$) è

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{x}(1, -e^{-x/d})$$

e la sua energia potenziale è (sempre nelle stesse coordinate)

$$V(x) = mgde^{-x/d} + \frac{k}{2}(x^2 + d^2e^{-2x/d})$$

quindi la Lagrangiana del sistema è

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + e^{-2x/d}) - mgde^{-x/d} - \frac{k}{2}(x^2 + d^2e^{-2x/d}).$$

2 - L'equazione di Eulero-Lagrange è

$$m\ddot{x}(1 + e^{-2x/d}) - \frac{m}{d}\dot{x}^2e^{-2x/d} - mge^{-x/d} + k(x - de^{2x/d}) = 0.$$

3 - L'energia del sistema è

$$E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + e^{-2x/d}) + mgde^{-x/d} + \frac{k}{2}(x^2 + d^2e^{-2x/d})$$

ed è una grandezza conservata.

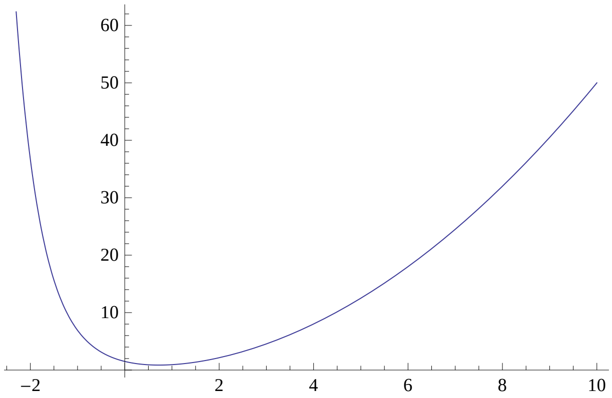
4 - Studiamo il grafico dell'energia potenziale. La derivata seconda di V è

$$V''(x) = \frac{mg}{d}e^{-x/d} + k(1 + 2e^{-2x/d}) > 0$$

inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} V'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} V'(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} V(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} V(x) = \infty.$$

quindi il grafico di V è dalla forma



In particolare, il sistema ammette un unico punto di equilibrio, che è stabile.

5 - L'equazione delle curve di livello si deduce da quella dell'energia

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m(1 + e^{-2x/d})}}.$$

Dato che $1 + e^{-2x/d} > 0$, la forma delle curve di livello si deduce dal grafico dell'energia potenziale ed è la seguente: